

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

10 februarie 2024

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Rezolvați în numere reale ecuația:

$$[x] + \frac{2023}{[x]} = \{x\} + \frac{2023}{\{x\}}.$$

Subiectul 2. Demonstrați că orice număr natural $n \geq 14$ se poate scrie ca o sumă în care fiecare termen al sumei este egal cu 3 sau cu 8.

Subiectul 3. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați că:

$$\frac{a^2}{a^2 + bc + ca} + \frac{b^2}{b^2 + ca + ab} + \frac{c^2}{c^2 + ab + bc} \geq 1.$$

Subiectul 4. Laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC sunt paralele cu medianele din A_1, B_1 , respectiv C_1 ale unui triunghi $A_1B_1C_1$. Demonstrați că medianele din A, B, C ale triunghiului ABC sunt paralele cu laturile B_1C_1, C_1A_1 , respectiv A_1B_1 ale $\Delta A_1B_1C_1$.

Fiecare subiect este cotelat cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.