

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 februarie 2018
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE-CLASA a IX-a

1. a) (3p) Demonstrați că, pentru orice trei numere reale a, b, c , are loc inegalitatea:

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2).$$

b) (4p) Fie x, y, z trei numere reale cu proprietatea $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. Să se arate că:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + yz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + xz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + xy + 3}} \geq 1.$$

G.M.12/2012

Soluție: a) $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \leq 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow$

$$2ab+2ac+2bc \leq 2(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0, \text{ inegalitate adevărată.}$$

b) Din inegalitatea CBS deducem că:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + yz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + xz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + xy + 3}} \geq \frac{(1+1+1)^2}{\sum \sqrt{x^2 + yz + 3}} = \frac{9}{\sum \sqrt{x^2 + yz + 3}} \quad (1)$$

Este suficient să demonstrăm că $\sum \sqrt{x^2 + yz + 3} \leq 9$.

Aplicând inegalitatea de la punctul a) se obține $\left(\sum \sqrt{x^2 + yz + 3}\right)^2 \leq 3\left(\sum (x^2 + yz + 3)\right) =$

$$= 3(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz + 9) \leq 81 \Rightarrow \sum \sqrt{x^2 + yz + 3} \leq 9 \quad (2)$$

Din inegalitățile (1) și (2) se obține concluzia. Egalitatea are loc pentru $x = y = z = \sqrt{3}$.

Barem:

a) $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \leq 3(a^2+b^2+c^2) \dots\dots\dots$ 1p

Finalizare demonstrație..... 2p

b) Demonstrează $\frac{1}{\sqrt{x^2 + yz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + xz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + xy + 3}} \geq \frac{9}{\sum \sqrt{x^2 + yz + 3}} \dots\dots\dots$ 1p

Demonstrează $\sum \sqrt{x^2 + yz + 3} \leq 9 \dots\dots\dots$ 2p

Finalizare $\frac{1}{\sqrt{x^2 + yz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + xz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + xy + 3}} \geq 1 \dots\dots\dots$ 1p

2. (7p) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\frac{n+2017}{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor}$ și $\frac{n+2018}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ sunt numere naturale.

Prelucrare G.M.

Soluție. Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Avem $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = p \Leftrightarrow p \leq \sqrt{n} < p+1 \Leftrightarrow p^2 \leq n < p^2 + 2p, n \in \mathbb{N}$.

Dacă $n \in \{p^2, p^2 + 1, \dots, p^2 + 2p - 1\}$, rezultă $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = p$. În acest caz $\frac{n+2017}{p} \in \mathbb{N}, \frac{n+2018}{p} \in \mathbb{N}$, de

unde deducem în mod necesar că $p=1 \Rightarrow n=1$ sau $n=2$.

Dacă $n = p^2 + 2p \Rightarrow \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = p+1$. Condițiile din ipoteză devin $\frac{n+2017}{p+1} \in \mathbb{N}, \frac{n+2018}{p} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$\frac{p^2 + 2p + 2017}{p+1} \in \mathbb{N}, \frac{p^2 + 2p + 2018}{p} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2016}{p+1}, \frac{2018}{p} \in \mathbb{N}. \text{ Singurele valori pentru } p \text{ sunt } 1 \text{ și } 2, \text{ de unde}$$

obținem $n=3$, respectiv $n=8$. În concluzie, numerele naturale care satisfac cerințele sunt 1, 2, 3 și 8.

Barem.

$$\lceil \sqrt{n} \rceil = p \Leftrightarrow p \leq \sqrt{n} < p+1 \Leftrightarrow p^2 \leq n < p^2 + 2p \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Tratarea cazului când } n \in \{p^2, p^2 + 1, \dots, p^2 + 2p - 1\} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Tratarea cazului când } n = p^2 + 2p \dots\dots\dots 3p$$

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, definită prin:

$$f(1) = 1 \text{ și } f(n) = \begin{cases} f(n-1) + 2n - 1, & \text{dacă } n \geq 2, n \text{ număr par} \\ f(n-2) + 4n - 4, & \text{dacă } n \geq 3, n \text{ număr impar} \end{cases}.$$

(5p) a) Calculați $f(2017)$; (2p) b) Găsiți o funcție $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ care satisface $g \circ f = 1_{\mathbb{N}^*}$ și $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}^*}$, unde $1_{\mathbb{N}^*}$ reprezintă funcția identică a mulțimii $\mathbb{N}^*$.

Dan Popescu, Suceava

Soluție. a) $f(2) = f(1) + 2 \cdot 2 - 1 = 4$.

$$f(3) = f(1) + 4 \cdot 3 - 4 = 1 + 12 - 4 = 9.$$

Se arată folosind metoda inducției matematice că $f(n) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $f(2017) = 2017^2$.

b) Putem considera, de exemplu, o funcție definită astfel $g(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n \text{ este pătrat perfect} \\ 2, & \text{în rest} \end{cases}$.

Avem $g(f(n)) = g(n^2) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $g \circ f = 1_{\mathbb{N}^*}$.

Pentru orice număr natural k , care nu este pătrat perfect, avem $f(g(k)) = f(2) = 4$, deci $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}^*}$.

Barem.

$$\text{a) Calculează } f(2) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Calculează } f(3) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Demonstrează inductiv că } f(n) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{b) Construiește o funcție cu proprietățile cerute} \dots\dots\dots 2p$$

4. Fie ABC un triunghi oarecare, M mijlocul laturii $[BC]$ și D, E, F trei puncte coliniare astfel încât $D \in (AB), E \in (AM), F \in (AC)$.

(4p) a) Să se arate că E este mijlocul segmentului $[DF] \Leftrightarrow DF \parallel BC$;

(3p) b) Dacă $AD = \frac{2}{5} AB$ și E este mijlocul segmentului $[AM]$, atunci $BE \parallel MF$.

Cristian Amorăriței, Suceava

Soluție. a) Notăm $\frac{AD}{AB} = k, \frac{AF}{AC} = p$.

Presupunem că E este mijlocul lui $[DF]$. Rezultă

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC}) \text{ și } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Deoarece $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AM}$ sunt vectori coliniari rezultă că $k = p$, adică

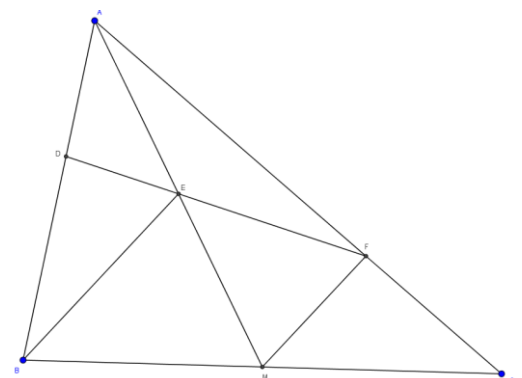
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}. \text{ Din reciproca teoremei lui Thales aplicată în}$$

triunghiul ABC rezultă că $DF \parallel BC$.

Reciproc, presupunem că $DF \parallel BC$ și din teorema fundamentală a asemănării obținem $\triangle ADE \sim \triangle ABM$ și $\triangle AEF \sim \triangle AMC$. Rezultă

$$\frac{AE}{AM} = \frac{DE}{BM} = \frac{EF}{MC} \Rightarrow DE = EF \Rightarrow E \text{ este mijlocul lui } [DF].$$

$$\text{b) } \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad (1)$$



Deoarece $E \in (DF)$, rezultă că există $\lambda \in (0,1)$ astfel încât $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AD} + (1-\lambda) \overrightarrow{AF} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + (1-\lambda) p \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \lambda \cdot \frac{2}{5} = (1-\lambda) p \Rightarrow \lambda = \frac{5}{8}, p = \frac{2}{3}. \text{ Obținem:}$$

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} \stackrel{(1)}{=} \frac{2}{3} \overrightarrow{BE}, \text{ de unde rezultă } BE \parallel MF.$$

Barem.

a) Demonstrează implicația directă..... 2p

Demonstrează implicația reciprocă..... 2p

b) Demonstrează $\overrightarrow{BE} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$ 1p

Demonstrează că $\frac{AF}{AC} = \frac{2}{3}$ 1p

Arată $\overrightarrow{MF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BE}$ 1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.