

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
17.02.2018  
BAREM**

CLASA A VI-A

**Subiectul I**

Fie semidreptele  $(OC$  și  $(OD$  în interiorul unghiului  $\widehat{AOB}$ . Dacă  $m(\widehat{COD}) = 14^\circ$ , și măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $\widehat{AOD}$  și  $\widehat{BOC}$  este de  $72^\circ$ , aflați valorile posibile ale  $m(\widehat{AOB})$ .

Fie  $[OM$  bis  $\angle AOD$  și  $[ON$  bis  $\angle BOC$ , deci  $m(\angle MON) = 72^\circ$  .....1p

Notăm  $m(\angle AOD) = 2x$ ,  $m(\angle AOM) = m(\angle MOD) = x$  și

$$m(\angle BOC) = 2y, \quad m(\angle BON) = m(\angle NOC) = y$$

Cazul I ( $OC \in \text{Int } \angle AOD$ )

Desen .....0,5p

$$m(\angle MON) = x + y - 14^\circ = 72^\circ \text{ deci } x + y = 86^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle AOB) = m(\angle AOC) + m(\angle BOC) = 2x + 2y - 14^\circ = 158^\circ \dots\dots\dots 1,5p$$

Cazul II ( $OD \in \text{Int } \angle AOC$ )

Desen .....0,5p

$$m(\angle MON) = x + y + 14^\circ = 72^\circ \text{ deci } x + y = 58^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$m(\angle AOB) = m(\angle AOC) + m(\angle BOC) = 2x + 2y + 14^\circ = 130^\circ \dots\dots\dots 1,5p$$

**Subiectul II**

- a) Fie numerele  $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$  și  $B = \frac{A}{10^n}$ , unde  $n \in \mathbb{N}$ . Aflați valoarea maximă a lui  $n$  pentru care  $B$  este număr natural.

Căzănel Gheorghe

- b) Câte fracții de forma  $\frac{\overline{abca}}{1001}$  sunt reductibile?

Trofin Ovidiu

- a)  $B$  este natural  $\leftrightarrow A: 10^n \leftrightarrow A: 2^n$  și  $A: 5^n$  .....0,5p  
 Exponentul lui 2 din descompunerea lui  $A$  este  $50+25+12+6+3+1=97$ ... 1p  
 Exponentul lui 5 din descompunerea lui  $A$  este  $20+4=24$ . ....1p  
 Valoarea maximă a lui  $n$  este minimul dintre 24 și 97. Deci,  $n=24$ .....1p

- b)  $\overline{abca} = 1001a + \overline{bc}$  .....0,5p  
 Dacă fracția este reductibilă prin  $d$ , atunci  $1001: d$  și  $\overline{bc}: d$ .....0,5p

Deci  $\overline{bc}$  are divizori primi pe 7, 11 sau 13.....0,5p

Numerele  $\overline{bc}$  pot fi: 00, 07, 14, 21, ...77, 84, 91, 98  $\rightarrow$  15 posibilități

**00, 11, 22, ...77, 88, 99**  $\rightarrow$  10 posibilități

**00, 13, 26, ..., 91**  $\rightarrow$  8 posibilități

$\overline{bc}$  poate lua deci  $15+8+6=29$  valori .....1p

$\overline{abca}$  poate lua  $9 \cdot 29 = 261$  valori, adică sunt 261 fracții reductibile.....1p

### Subiectul III

Fie  $\triangle ABC$  isoscel, cu  $[AB] \equiv [AC]$ . Dacă fixăm punctele  $M$  și  $N$  pe segmentele  $(AB)$ , respectiv  $(AC)$ , punctul  $D$  pe semidreapta  $(BN)$  și punctul  $P$  pe segmentul  $(AD)$  astfel încât  $[AB] \equiv [AD]$  și  $[AM] \equiv [AN] \equiv [AP]$ , arătați că  $CM + CP = BD$ .

Desen.....1p

$\triangle ACM \equiv \triangle ABN (LUL)$ , deci  $[BN] \equiv [CM]$  .....2p

$\triangle ADN \equiv \triangle ACP (LUL)$ , deci  $[DN] \equiv [CP]$  .....2p

$BD = BN + ND = CM + CP$ .....2p

### Subiectul IV

Aflați numerele prime  $a < b < c$  știind că  $a^2 + b^2 + c^2 = 10214$ .

Trofin Ovidiu

pp. R.A. că  $a, b, c$ , impare implică  $a^2 + b^2 + c^2 =$  impar (fals), deci  $a = \text{par} = \text{prim} = 2$ .....2p

$b^2+c^2=10210$ .....0,5p  
 pp. R.A. că  $b>3$  implică  $b^2+c^2=(6x+1)+(6y+1)=6k+2$  .....1p  
 dar  $10210=6 \cdot 1701+4$ , contradicție.....1p  
 deci  $b=3=\text{prim}$ .....1p  
 rezultă  $c^2=10201$ , de unde  $c=101$ .....1p  
 $101=\text{prim}(\text{demonstratie})$ .....0,5p