

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 1.02.2020
Clasa a XII-a

1. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 2 \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx \right)^n$.

2. Calculați integrala definită $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^2} + 1 - x^2}{a^x + 1} dx$, unde $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Pe mulțimea $G = \mathbb{C} - \{1\}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - xy$.

a) (3p) Arătați că $(G, \circ)$ este grup.

b) (4p) Rezolvați în G ecuația $x \circ i \circ x = i \circ x \circ i$.

4. Se consideră grupul finit $(G, \cdot)$ pentru care există un subgrup propriu H și există un element $x \in G$ cu proprietatea $G = H \cup xH$, unde $xH = \{xh \mid h \in H\}$, precum și mulțimea $K = \{y^2 \mid y \in G\}$. Demonstrați că:

a) (4p) $K \subseteq H$.

b) (3p) Dacă $|G| = 2n$ cu n impar, atunci $K = H$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.