S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a VIII-a
Barem de evaluare

Subiectul I.

Se dă expresia $E(x)=\frac{x^3-1}{x^3+1}$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

a) Să se arate că: $(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1$, $\forall k\in\mathbf{N}$.

b) Arătați că $\frac{3}{2}\cdot E(2)\cdot E(3)\cdot\ldots\cdot E(n)\in(1;2)$, $\forall n\in\mathbf{N}$

Soluție

1 punct oficiu

a) $(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+2k+1-k-1+1=k^2+k+1$ 2 puncte

b) $E(x)=\frac{x^3-1}{x^3+1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\Rightarrow E(2)=\frac{1(2^2+2+1)}{3(2^2-2+1)}$ 1 punct

$$E(3)=\frac{2(3^2+3+1)}{4(3^2-3+1)}$$

$$E(4)=\frac{3(4^2+4+1)}{5(4^2-4+1)}$$

....

$$E(n)=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$ 1 punct

$$\Rightarrow E(2)\cdot E(3)\cdot E(4)\cdot\ldots\cdot E(n)\overset{a)}{=}\frac{1(2^2+2+1)}{3(2^2-2+1)}\cdot\frac{2(3^2+3+1)}{4(2^2+2+1)}\cdot\frac{3(4^2+4+1)}{5(3^2+3+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}=$$

$$=\frac{1\cdot2(n^2+n+1)}{n(n+1)(2^2-2+1)}=\frac{1\cdot2(n^2+n+1)}{n(n+1)\cdot3}$$ 1 punct

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

Deci,

$$\frac{3}{2}\cdot E(2)\cdot E(3)\cdot E(4)\cdot \ldots \cdot E(n)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2\cdot(n^2+n+1)}{3\cdot n(n+1)}=\frac{n^2+n}{n^2+n}+\frac{1}{n^2+n}=1+\frac{1}{n^2+n}\in(1;2)$$

1 punct

Subiectul II.

Fie A, B, C, D puncte necoplanare, $M\in(AB), N\in(BC),\ P\in(CD)$ şi $Q\in(AD)$ astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PD}=\frac{1}{k}$ şi $\frac{AQ}{QD}=\frac{1}{k^3}$, $k\in R_+$. Să se arate că M, N, P şi Q sunt coplanare.

Solutie

1 punct oficiu

I. Pentru k=1 => M mijl. AB, N mijl. BC, P mijl. CD, Q mijl. CD.
MQ si NP linii mijl. in Δ DAB si Δ DBC — 1 punct
=> MQ|| DB || NP => M,N,P si Q coplanare — 1 punct

II. Pt. k≠1, avem:
Fie MN∩AC={X}, XP∩AD={T} — 1 punct
Din Δ ABC, ceviana X-M-N =>
(T. Menelaos) $\frac{CX}{XA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}=1$=>
$\frac{XC}{XA}=k^2$. (1) — 1 punct
Din Δ DAC, ceviana X-T-P =>
(T. Menelaos) $\frac{AT}{TD}\cdot\frac{DP}{PC}\cdot\frac{CX}{XA}=1$ si (1) =>
$\frac{TA}{TD}=\frac{1}{k^3}$. (2) — 1 punct
Din ip. si (2) => $\frac{TA}{TD}=\frac{QA}{QD}$ => T=Q =>
P,Q,M,N∈ (XPN), deci coplanare. — 1 punct

Subiectul III.

Fie $x,z,y\in R_+^*$ numere distincte două câte două, astfel încât $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$. Arătaţi că $|xyz|=1$

Solutie

1 punct oficiu

Fie $x+\frac{1}{y}=t$ => $y=\frac{1}{t-x}$ si $z=t-\frac{1}{x}$ — 1 punct

Avem, $y+\frac{1}{z}=t$ => $\frac{1}{t-x}+\frac{x}{tx-1}=t$ => $(t^2-1)(x^2-tx+1)=0$ => — 2 puncte

I. $(x^2-tx+1)=0$ ⇔ $x+\frac{1}{x}=t$, dar $x+\frac{1}{z}=t$ => x=y, contradictie. — 1 punct

II. $t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$ si $t > 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow xyz = x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-1}{x} = -1$

$\Rightarrow |xyz| = 1$ 2 puncte

Subiectul IV.

a) Demonstraţi că nu există numere naturale *x*, *y*, *z* pentru care $x + 3y + 5z = 2012$ şi $x^2 + y^2 + 3z^2 = 2013$.

b) În patrulaterul convex ABCD avem $AC^2+BD^2=AD^2 + 2AB \cdot CD + BC^2$.

Să se arate că ABCD este trapez sau paralelogram.

(G. M. 2012)

Solutie

1 punct oficiu

a) $x + 3y + 5z = 2012$ (1)

$x^2 + y^2 + 3z^2 = 2013$ (2)

Din (1) si (2) prin diferenta obtinem $x^2 - x + y^2 - 3y + 3z^2 - 5z = 1 \Leftrightarrow$

$x(x-1) + y(y-3) + z(3z-5) = 1.$ 1 punct

Deci 2 termeni sunt nuli iar unul este = 1.

x(x-1)=par (produs de nr. consecutive). Distingem urmatoarele situatii:

I. y si z au aceeasi paritate => $y(y-3) + z(3z-5) =$ par => par =1 fals. 1 punct

II. y si z au paritati diferite => $y(y-3) + z(3z-5) =$ par => par =1 fals. 1 punct

b) Fie E şi F mijl. BD şi AC.

Din T. Euler => $AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = AC^2 + DB^2 + 4EF^2$ => 1 punct

$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = AD^2 + 2AB \cdot CD + BC^2 + 4EF^2$ =>

$(AB - CD)^2 = 4EF^2$ => 1 punct

$\frac{AB-CD}{2} = EF$ => ABCD trapez. (caz particular AB=CD => paralelogram) 1 punct

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim