



Olimpiada de matematică
Faza locală - 20 februarie 2015

Clasa a IX-a

- 1.
- (i) Să se rezolve ecuația $\left[\frac{2x-1}{3} \right] = x-1$, $x \in \mathbb{R}$, unde pentru $a \in \mathbb{R}$, $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a .
- (ii) Să se determine o progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $6/7^n + a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

- 2.
- (i) Arătați că $\left[\sqrt{4n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+2} \right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Demonstrați că $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+1} \right]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde pentru $a \in \mathbb{R}$, $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a .

- 3.
- (i) Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Să se arate că $4(a+c)(b+d) \leq (a+b+c+d)^2$.
- (ii) Numerele reale pozitive x, y, z, t au suma egală cu 4. Să se arate că $x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{t} + t\sqrt{x} \leq 4$.
- GM 2014

4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O . Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA , respectiv DAB și cu M, N mijloacele diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$.
- (i) Arătați că segmentele $[DH_1], [AH_2], [BH_3], [CH_4]$ au același mijloc P .
- (ii) Arătați că punctele O, P și mijlocul segmentului $[MN]$ sunt coliniare.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.