

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 22 februarie 2020

Barem de corectare clasa a IX-a

PROBLEMA 1

(4p) a) Să se determine numerele $x, y, z, t \in (0, \infty)$ dacă $xy = zt = 1$ și

$$\sqrt{x+y+z+t}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1+z} + \sqrt{1+t}) = 8\sqrt{2}.$$

(3p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$.

(prin $[x]$ și $\{x\}$ s-a notat partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x)

Soluție:

a) Din $1+x \geq 2\sqrt{x}$, $1+y \geq 2\sqrt{y}$ avem $(1+x)(1+y) \geq 4\sqrt{xy} = 4$ și $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} \geq$

$2\sqrt{\sqrt{(1+x)(1+y)}} \geq 2\sqrt{2}$, Analog $\sqrt{1+z} + \sqrt{1+t} \geq 2\sqrt{2}$ 1 punct

Din $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, $z+t \geq 2\sqrt{zt}$ avem $x+y+z+t \geq 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{zt} = 4$ 1 punct

deci $\sqrt{x+y+z+t}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1+z} + \sqrt{1+t}) \geq 2(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$ 1 punct

Cum avem egalitate, în ultima inegalitate, rezultă că $x+y = 2\sqrt{xy}$, $z+t = 2\sqrt{zt}$, deci $x = y$ și $z = t$.

Cum $xy = zt = 1$ obținem $x = y = z = t = 1$ 1 punct

(selectată din GM 5/2019 și propusă de prof. Alexușan Klara – Colegiul Tehnic "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău)

b) Fie x o eventuală soluție a ecuației, atunci $\{x\} \in (0,1)$ și astfel $[x] + \frac{1}{[x]} > 0$, deci $[x] > 0$ 1 punct

Dacă $[x] = 1$, atunci $\{x\} + \frac{1}{\{x\}} = 2 \Rightarrow \{x\} = 1$ imposibil!. Așadar avem $[x] \geq 2$ 1 punct

Fie $[x] = k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ și $\{x\} = \alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Ecuația devine $k + \frac{1}{k} = \alpha + \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow (k - \alpha)\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) = 0$.

Deoarece $k - \alpha \neq 0$, deduce că $1 - \frac{1}{k\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{k}$, de unde $x = k + \frac{1}{k}$. Se verifică faptul că numerele de

forma $k + \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ verifică ecuația 1 punct

(selectată din problemele Concursului Viitori olimpici de prof. Opreș Adonia-Augustina – inspector școlar)

PROBLEMA 2

Demonstrați că pentru orice $n \in N^*$ avem:

$$(4p) \text{ a) } \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} + \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} + \dots + \frac{\sqrt{2n+2}}{2n+3} < \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+4}}.$$

$$(3p) \text{ b) } \sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)} < \frac{n(n+2)}{2}.$$

Soluție:

$$\text{a) Avem } \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+2)^2}} < \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+2)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+3)}} = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \dots \dots \dots 2 \text{ puncte}$$

Analog avem

$$\frac{\sqrt{n+2}}{n+3} = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{(n+3)^2}} < \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{(n+3)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{(n+2)(n+4)}} = \frac{1}{\sqrt{n+4}} \dots \dots \dots 1 \text{ puncte}$$

$$\frac{\sqrt{2n+2}}{2n+3} = \frac{\sqrt{2n+2}}{\sqrt{(2n+3)^2}} < \frac{\sqrt{2n+2}}{\sqrt{(2n+3)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{2n+2}}{\sqrt{(2n+2)(2n+4)}} = \frac{1}{\sqrt{2n+4}}$$

Adunând aceste relații, membru cu membru, obținem inegalitatea cerută.....1 punct

(problemă propusă de Liceul Teoretic "Ion Agârbiceanu" Jibou)

b) Din inegalitatea mediilor avem

$$\sqrt{1 \cdot 2} < \frac{1+2}{2}, \sqrt{2 \cdot 3} < \frac{2+3}{2}, \dots, \sqrt{n(n+1)} < \frac{n+(n+1)}{2} \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$$

Adunând relațiile, se obține

$$\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)} < \frac{1+2}{2} + \frac{2+3}{2} + \dots + \frac{n+(n+1)}{2} \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$$

$$= \frac{1+2+2+3+3+\dots+n+n+(n+1)}{2} = \frac{1+2(2+3+\dots+n)+(n+1)}{2}$$

$$= \frac{1+2 \frac{(n+2)(n-1)}{2} + (n+1)}{2} = \frac{1+n^2+n-2+n+1}{2} = \frac{n^2+2n}{2} = \frac{n(n+2)}{2} \dots \dots \dots 1 \text{ punct}$$

(selectată din "Olimpiade și concursuri școlare 2015-201, clasele IX-XII" ed. Paralela 45 și propusă de prof. Alexuțan Klara – Colegiul Tehnic "Alesandru Papiu Ilarian" Zalău)

PROBLEMA 3

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$. Determinați numărul tripletelor $(x; y; z) \in A \times A \times A$ cu proprietatea că $x < y < z$, iar x, y, z sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice cu rația număr natural.

Soluție:

Notând cu $r \in N - \{0,1\}$ rația progresiei geometrice, avem $y = xr$ și $z = xr^2$ și din faptul că x, y, z sunt termeni consecutivi se obține $1 \leq x < xr < xr^2 \leq 100 \Rightarrow r^2 \leq \frac{100}{x} \leq 100$. Dar $r \in N - \{0,1\}$, deci $r \in \{2,3,\dots,10\}$ 2 puncte

Dacă $r = 2$, atunci $x \leq \frac{100}{4} = 25$ și obținem 25 progresii geometrice. Dacă $r = 3$, atunci $x \leq \frac{100}{9}$ și obținem 11 progresii geometrice. Dacă $r = 4$, atunci $x \leq \frac{100}{16}$ și obținem 6 progresii geometrice. Dacă $r = 5$, atunci $x \leq \frac{100}{25} = 4$ și obținem 4 progresii geometrice. Dacă $r = 6$ și $r = 7$ atunci $x \leq \frac{100}{36}$, respectiv $x \leq \frac{100}{49}$ și obținem câte 2 progresii geometrice în fiecare situație. Dacă $r = 8$, $r = 9$ și $r = 10$ atunci $x \leq \frac{100}{64}$, $x \leq \frac{100}{81}$, respectiv $x \leq \frac{100}{100} = 1$ și obținem câte 1 progresie geometrică în fiecare situație. 4 puncte

În concluzie, există 53 triplete cu proprietățile din enunț.

(selectată din problemele Concursului Viitori olimpici de prof. Opreș Adonia-Augustina – inspector școlar)

PROBLEMA 4

În patrulaterul $ABCD$, fie O intersecția diagonalelor, iar M, P, Q pe (BD) , (AB) respectiv (DC) , astfel

încât $\frac{MB}{MD} = 4, \frac{AP}{PB} = 3, \frac{DQ}{QC} = \frac{5}{3}$. Notăm $\frac{OD}{OB} = k$ și $\frac{OC}{OA} = p$.

(3p) a) Să se arate că $\overrightarrow{OQ} = \frac{5p}{8(p+1)} \overrightarrow{AC} + \frac{3k}{8(k+1)} \overrightarrow{BD}$.

(4p) b) Dacă vectorii $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OQ}$ și $\overrightarrow{CP}$ sunt coliniari, arătați că $ABCD$ este paralelogram.

Soluție:

a) Din $\frac{DQ}{QC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{3\overrightarrow{OD} + 5\overrightarrow{OC}}{8}$ 1 punct

Dar $\overrightarrow{OD} = \frac{k}{k+1} \overrightarrow{BD}$, iar $\overrightarrow{OC} = \frac{p}{p+1} \overrightarrow{AC}$ 1 punct

Obținem $\overrightarrow{OQ} = \frac{5p}{8(p+1)} \overrightarrow{AC} + \frac{3k}{8(k+1)} \overrightarrow{BD}$ 1 punct

b) Considerăm baza $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\}$ și obținem:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{p+1} \overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{BD},$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{p+1}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{k+1}\overrightarrow{BD},$$

$$\overrightarrow{CB} = -\frac{p}{p+1}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{k+1}\overrightarrow{BD}.$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{p+1}\overrightarrow{AC} + \frac{4k-1}{5(k+1)}\overrightarrow{BD} \dots \dots \dots 1\text{punct}$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{-4p-1}{4(p+1)}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4(k+1)}\overrightarrow{BD} \dots \dots \dots 1\text{punct}$$

Deoarece vectorii sunt coliniari obținem: $p = \frac{3k}{4k-1}$ și $4p+1 = \frac{15}{4k-1} \Rightarrow p = k = 1 \dots 1\text{punct}$

Deci, O este mijlocul diagonalelor și rezultă că $ABCD$ este paralelogram $\dots \dots \dots 1\text{punct}$

(selectată din supliment G.M. și propusă de Liceul Tehnologic "Gheorghe Pop de Băsești" Cehu Silvaniei)