

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16 februarie 2020
Clasa a V-a

Barem de corectare

SUBIECTUL 1

Suma a patru numere naturale este 2020. Împărțind primul număr la al doilea, se obține câtul 1 și restul 1, împărțind al doilea număr la al treilea, se obține câtul 2 și restul 2 și împărțind pe al treilea la al patrulea, obținem câtul 3 și restul 3. Aflați cele patru numere.

Soluție și barem:

$$a + b + c + d = 2020 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = b + 1, \quad b > 1$$

$$b = 2c + 2, \quad c > 2$$

$$c = 3d + 3, \quad d > 3 \dots\dots\dots 2p$$

$$b = 6d + 8, \quad a = 6d + 9 \dots\dots\dots 2p$$

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 6d + 9 + 6d + 8 + 3d + 3 + d \\ &= 16d + 20 \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

$$16d + 20 = 2020 \Rightarrow d = 125 \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 759, \quad b = 758, \quad c = 378 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 2

Determinați numărul $\overline{xyzt}$, scris în baza 10, care este multiplu de 89 și verifică relația $\overline{xyzt} = 2020 + 5(2x + 20y + z + t) - 2x$.

Soluție și barem:

Scriind descompunerea în baza 10 a numărului, obținem:

$$1000x + 100y + 10z + t = 2020 + 8x + 100y + 5z + 5t \dots\dots\dots 1p$$

$992x + 5z - 4t = 2020$, relație în care termenii sunt multipli de 4, mai puțin $5z \Rightarrow z$ este multiplu de 4 și este cifră, deci este 4 sau 8..... 2p

Pentru $z = 4$ se obține $992x - 4t = 2000 \Rightarrow 248x - t = 500 \Rightarrow x = 2$ și $t = -4$, ceea ce este imposibil1p

Pentru $z = 8$ se obține $992x - 4t = 1980 \Rightarrow 248x - t = 495 \Rightarrow x = 2$ și $t = 1$, ceea ce verifică cerințele.....1p

Se obține că numărul este multiplu de 89 de forma $\overline{2y81}$. Cum $2081 : 89 = 23$, rest 34, este necesar ca $\overline{y34}$ să fie multiplu de 89, deci $y = 5$ este singura soluție.....2p

SUBIECTUL 3

Suma a 100 de numere naturale nenule diferite este 5555. Arătați că cel puțin unul dintre aceste numere este multiplu de 10.

Soluție și barem:

Suma primelor 100 de numere naturale nenule diferite care nu sunt multipli de 10 este: $(1+2+\dots+9)+(11+12+\dots+19)+(21+22+\dots+29)+\dots+(101+102+\dots+109)+111=$

$$45+(90+45)+(2\cdot 90+45)+\dots+(10\cdot 90+45)+111=$$

$$11\cdot 45+90\cdot (1+2+\dots+10)+111=$$

$$495+90\cdot 55+111=$$

$$5556\dots\dots\dots 5p$$

Cum suma numerelor din enunțul problemei este mai mică cu o unitate, înseamnă că cel puțin unul dintre numere este mai mic, adică este unul dintre numerele neconsiderate inițial, adică este multiplu de 10.....2p

SUBIECTUL 4

Un număr care citit de la dreapta la stânga și de la stânga la dreapta este la fel, se numește „palindromic”. De exemplu , 151, 1771, 20202, etc.

- a) Dacă se notează cu n suma numerelor „palindromice” cu trei cifre ce conțin cifra 0, să se arate că 2^n este cub perfect.
- b) Să se determine câte numere „palindromice” cu șase cifre sunt divizibile cu 22.

Soluție și barem:

- a) Numerele „palindromice” cu trei cifre ce conțin cifra 0 sunt:

101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909.....1p

$$n = 101(1 + 2 + 3 + \dots + 9)$$

$$n = 101 \cdot 9 \cdot 5 = 4545 \dots\dots\dots 1p$$

$$2^n = 2^{4545} = 2^{1515 \cdot 3} = (2^{1515})^3 \dots\dots\dots 1p$$

$$\overline{abccba} : 22, a \neq 0$$

- b)

$$22 = 11 \cdot 2, (2, 11) = 1 \Rightarrow \overline{abcb} : 11 \text{ și } \overline{abccba} : 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\overline{abccba} = 100001a + 10010b + 1100c$$

$$= 11(9091a + 910b + 100c) \Rightarrow \overline{abccba} : 11 \text{ oricare ar fi cifrele } a, b, c \dots\dots 1p$$

$$\overline{abccba} : 2 \Rightarrow a \text{ poate fi } 2, 4, 6, 8 \dots\dots\dots 1p$$

Dacă $a = 2$ atunci b se poate alege în 10 moduri, c în 10 moduri

Analog pentru $a = 4, a = 6, a = 8$.

Se obțin 100 de numere pentru fiecare caz în parte, în total 400 de numere.....1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IALOMIȚA



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII