



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17.02.2018

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar H_1, H_2 și H trei subgrupuri ale sale. Să se arate că:

- a) $H_1 \cap H_2$ este subgrup al lui G ;
- b) $H_1 \cup H_2$ este subgrup al lui G , dacă și numai dacă $H_1 \subseteq H_2$ sau $H_2 \subseteq H_1$;
- c) $H \subseteq H_1 \cup H_2$, dacă și numai dacă $H \subseteq H_1$ sau $H \subseteq H_2$.

PROBLEMA 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $x, y \in G$, astfel încât $x^2 = y^2 = (xy)^2$. Arătați că $x^{2020} = y^{2020} = e$, unde e este elementul neutru al grupului.

PROBLEMA 3. Să se calculeze $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\{x\}}{\sin x} dx$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

PROBLEMA 4. Să se determine funcțiile integrabile $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x) - \int_0^1 (x+y) \cdot f(y) dy = x, \quad \forall x \in [0; 1].$$

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.