



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța 21.02.2016

Clasa a IX -a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

- Dacă $x \geq 2 \Rightarrow [x] \geq 2, [x^2] \geq 4, (F)$2p
 $x \in [0,1) \Rightarrow x^2 \in [0,1) (F)$1p
 $x \in [1, \sqrt{2}) \Rightarrow x^2 \in [1,2) \Rightarrow 1+1=2 \Rightarrow x \in [1, \sqrt{2})$ este soluție.....3p
 $x \in [\sqrt{2}, 2) \Rightarrow x^2 \in [2,4) \Rightarrow [x] + [x^2] \geq 1+2=3 (F)$. Deci soluția este $x \in [1, \sqrt{2})$1p

SUBIECTUL 2

- a) Prin calcul direct2p
 b) Pentru $x < 0, 4^x - 2^x \geq -\frac{1}{4}; 6x \leq -6 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții în $Z \setminus N$ 2p
 $x \in N$. $x=0$ e soluție, $x=1$ nu convine, $x=2$ e soluție.....1p
 Inducție matematică pentru $4^n - 2^n > 6n, \forall n \geq 3, n \in N \Rightarrow S = \{0, 2\}$2p

SUBIECTUL 3

- a) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (1+1+1)(x^4 + y^4 + z^4) \leq 144$ 2p
 Finalizare1p

$$b) \sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1+x^2+y^2}{3}} \leq \frac{3 + \frac{1+x^2+y^2}{3}}{2} = \frac{10+x^2+y^2}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \geq \frac{6}{10+x^2+y^2} \text{ și analoagele} \dots\dots\dots 2p$$

$$S \geq \frac{6}{10+x^2+y^2} + \frac{6}{10+y^2+z^2} + \frac{6}{10+z^2+x^2} \geq \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{6})^2}{30 + 2(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{54}{30 + 2 \cdot 12} = 1$$

Egalitate pentru ± 2 2p

SUBIECTUL 4

$$\frac{AM}{AB} = k \Rightarrow \frac{MB}{AB} = 1-k \text{ și analoagele.}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{AD} + (1-k)\overrightarrow{DC} \dots\dots\dots 1p$$

$$MNPQ \text{ paralelogram} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD} + (1-k)\overrightarrow{DC} \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow (1-k)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow (1-k)(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow (1-2k)(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}, 1-2k \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ deci ABCD paralelogram.} \dots\dots\dots 1p$$

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .