



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
 etapa locală februarie 2016
 SUBIECT și BAREM Clasa a XII-a



PROBLEMA 1

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}} dx \right)$.

(Gazeta matematică)

Soluție:

$$\frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}} dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}} dx = \int_0^1 \frac{x dx}{1+e^{-nx}}. \quad \text{Avem 2p}$$

$$\boxed{0 \leq \frac{x}{1+e^{-nx}} \leq \frac{x}{e^{-nx}}} \quad \text{pentru orice 2p}$$

$$\begin{aligned} \text{Rezultă} \quad 0 &\leq \int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}} dx \leq \int_0^1 x e^{-nx} dx = \int_0^1 x \left(-\frac{e^{-nx}}{n} \right)' dx = -x \frac{e^{-nx}}{n} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n} dx \\ &= -x \frac{e^{-nx}}{n} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n} dx = -\frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-nx}}{n^2} \Big|_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-n}}{n^2} + \frac{1}{n^2}. \quad 2p \end{aligned}$$

$$\text{Atunci} \quad 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}} dx \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^n n} + \frac{1}{n} \right) = 0, \text{ deci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x}{1+e^{-nx}} dx \right) = 0. \quad 1p$$

PROBLEMA 2

Calculați $\int x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2+x+1} dx, \quad x \in (0, \infty)$.

Soluție:

$$\text{Se știe că} \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2+x+1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} \quad \text{și} \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in (0, \infty). \quad 2p$$

$$\text{Rezultă} \quad \int x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \left(x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - x \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left[x \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right) - x \left(\frac{\pi}{2} - \arctg (x+1) \right) \right] dx = \\
 &= - \int x \arctg x dx + \int x \arctg (x+1) dx = \quad 1p \\
 &= \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \arctg (x+1) dx - \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \arctg x dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} \arctg (x+1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+(x+1)^2} dx - \frac{x^2}{2} \arctg x + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} (\arctg (x+1) - \arctg x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+x+2-x-2}{x^2+x+2} dx = \quad 1p \\
 &= \frac{x^2}{2} (\arctg (x+1) - \arctg x) + \frac{1}{2} x - \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \int \frac{x+2}{x^2+x+2} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} (\arctg (x+1) - \arctg x) - \arctg x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x+1+3}{x^2+x+2} dx = \quad 1p \\
 &= \frac{x^2}{2} (\arctg (x+1) - \arctg x) - \arctg x + \frac{1}{4} \ln (x^2+x+2) + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \\
 &= \frac{x^2}{2} (\arctg (x+1) - \arctg x) - \arctg x + \frac{1}{4} \ln (x^2+x+2) + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \\
 &= \frac{x^2}{2} (\arctg (x+1) - \arctg x) - \arctg x + \frac{1}{4} \ln (x^2+x+2) + \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C. \quad 2p
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 3

Fie $G = (-k, k)$ unde $k > 0$ și operația $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$.

a) Arătați că G este parte stabilă în raport cu operația $*$.

b) Fie $f: R \rightarrow G$, $f(x) = \frac{1}{2k} \ln \frac{x+k}{x-k}$. Arătați că f este izomorfism între grupurile $(R, +)$ și $(G, *)$

Soluție:

a) $-k < x < k \Rightarrow x+k > 0$ și $x-k < 0$; $-k < y < k \Rightarrow y+k > 0$ și $y-k < 0$ 1p

$$(x+k)(y+k) > 0 \Rightarrow xy + k^2 > -k(x+y) \Rightarrow -1 < \frac{k(x+y)}{k^2+xy}$$

$$(x - k)(y - k) > 0 \Rightarrow xy + k^2 > k(x + y) \Rightarrow 1 > \frac{k(x+y)}{k^2+xy}, \quad k^2 + xy > 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$-1 < \frac{k(x+y)}{k^2+xy} < 1 \Rightarrow -k < \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy} < k, \quad k > 0 \Rightarrow G \text{ parte stabila} \quad \dots\dots\dots 1p$$

b) Demonstrarea bijectivității funcției f2p

$$f(x) \text{ este continuă și derivabilă pe } (-k, k) \text{ cu } f'(x) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{x-k}{x+k} \cdot \frac{(x-k)-(x+k)}{(x-k)^2} = \frac{1}{k^2-x^2}$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in (-k, k) \Rightarrow f - \text{strict crescătoare}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -k} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow f(x)$ - funcție bijectivă

Demonstrarea că funcția f este morfism, adică $f(x * y) = f(x) + f(y)$ 2p

$$f(x * y) = \frac{1}{2k} \ln \frac{\frac{k^2(x+y)}{k^2+xy} + k}{\frac{k^2(x+y)}{k^2+xy} - k} = \frac{1}{2k} \ln \frac{k(x+y) + k^2 + xy}{k(x+y) - (k^2 + xy)}$$

$$f(x) + f(y) = \frac{1}{2k} \left(\ln \frac{x+k}{x-k} + \ln \frac{y+k}{y-k} \right) = \frac{1}{2k} \ln \frac{k(x+y) + k^2 + xy}{k(x+y) - (k^2 + xy)}$$

c) $\Rightarrow f(x * y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f$ - morfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, *)$

PROBLEMA 4

Fie G un grup multiplicativ cu proprietățile : $(xy)^3 = x^3y^3$, $(xy)^4 = x^4y^4$, $(xy)^5 = x^5y^5$, $\forall x, y \in G$

Să se arate că grupul G este comutativ.

Soluție:

Ținând cont de egalitățile din enunț, avem : $x^4y^4 = (xy)^4 = (xy)^3xy = x^3y^3xy$ de unde $xy^3 = y^3x$2p

Deci x comută cu y^3 și, ca urmare, x comută cu orice putere întreagă a lui y^3 . Rezultă $xy^{3n} = y^{3n}x \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. ..1p

Analog obținem $x^5y^5 = (xy)^5 = (xy)^4xy = x^4y^4xy$ de unde $xy^4 = y^4x$. Deci $xy^{4k} = y^{4k}x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$2p

Numerele 3 și 4 sunt prime între ele și deci există $n, k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $3n+4k=1$. Putem scrie

$xy = xy^{3n+4k} = (xy^{3n})y^{4k} = (y^{3n}x)y^{4k} = y^{4k}(y^{3n}x) = y^{3n+4k}x = yx$. Deci grupul G este comutativ.2p