

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, 14.02.2014

Clasa a XII-a

1. Fie mulțimea $A = [2, 4]$, legea $x \circ y = \frac{3xy - 5x - 5y + 10}{2xy - 4x - 4y + 9}$ pe A și funcția $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ cu

$$f(x) = \frac{5-2x}{x-1}. \text{ Știind că legea este bine definită:}$$

(2p) a) Arătați că $\text{Im } f = [-1, 1]$ și că $f(x \circ y) = f(x)f(y), \forall x, y \in A$.

(5p) b) Deduceți asociativitatea legii, elementul neutru, elementele simetrizabile și calculați $\frac{11}{5} \circ \frac{17}{8} \circ \frac{23}{11} \circ \dots \circ \frac{6n+5}{3n+2}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

SGM10/2013

2. (4p) a) Se consideră $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ interval, două funcții derivabile, cu derivate continue. Determinați $\int [f'(x) + f(x)g'(x)] \cdot e^{g(x)} dx$.

(3p) b) Folosind eventual punctul a), calculați $\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x^2} e^{\frac{x+1}{x}} dx, x > 0$.

Petru Vlad

3. Fie $(C^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule, ε o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ și $H = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$. Arătați că:

(3p) a) H este subgrup al grupului $(C^*, \cdot)$.

(4p) b) Orice subgrup cu trei elemente al grupului $(C^*, \cdot)$ coincide cu H .

4. Se consideră șirul $I_n = \int_0^a \sin^n x \cos nx dx, n \in \mathbb{N}^*, \text{ unde } a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(4p) a) Demonstrați că, pentru orice număr natural $n \geq 3$, este adevărată relația de recurență

$$4I_n + I_{n-2} = \frac{2}{n} \sin^n a \sin na + \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} a \cos(n-1)a.$$

(3p) b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\alpha+2} I_{n+1} + 2^\alpha I_{n-1})$ unde $\alpha > 0$.

Livia Băcilă

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.