

Barem cls. a XI-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv .

1.a) $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$, deci $A^2 - 3A + 2I_2 = O_2$2 p
 $A^2 = 3A - 2I_2$. Înmulțind cu A , $A^3 = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I_2) - 2A = 7A - 6I_2$ 1 p

b) Din relația de la a) , $\det(A^2 + 2I_2) = \det(3A) = 3^2 \det A = 18$2 p

c) $\det(A^2 + 5I_2) = \det(3A + 3I_2) = \det(3(A + I_2)) = 3^2 \det(A + I_2)$.

$\det(A + I_2) = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = (ad - bc) + a + d + 1 = 6$, de unde rezultă relația.....2 p

2. a) Va rezulta $A^3 = x I_3$, $A^{2016} = A^{3 \cdot 672} = (x I_3)^{672} = x^{672} I_3$3 p

b) $\det(A^4 + A^5 + A^6) = \det[A^4(I_3 + A + A^2)] = (\det A)^4 \det(I_3 + A + A^2) \neq 0$ deci
 $\det A \neq 0$ și $\det(I_3 + A + A^2) \neq 0$2 p

$\det A = x$ și $\det(I_3 + A + A^2) = (x - 1)^2$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$2 p

3. a) Verificare prin calcul.....2 p

b) Avem $S_n = \frac{1}{6} \cdot \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \right] - \frac{1}{2} \cdot$
 $\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right]$, deci obținem

$S_n = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{11}{36} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right)$.

$\frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{2 \cdot (n^2 + 4n + 3) - (n^2 + 5n + 6) - (n^2 + 3n + 2)}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \frac{-2}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}$.

Se obține $S_n = \frac{2}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{-2}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}$, cu $n \geq 1$, deci

$0 < S_n < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$3 p

c) $6S_n + \frac{2}{3} = 1 + \frac{-2}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}$, deci

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} + 6S_n \right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)} \right)^{n^3} = e^{-2}$ 2 p

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^4}{x^2+1}} + ax \right) = 1 - b, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} + ax \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} + ax \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left((-x) \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} + ax \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} + a \right) = 1 - b, \text{ deci } a = 1$$

.....2 p

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{1 - \frac{x^2}{x^2+1}}{1 + \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{1 + \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}} = 0, 1 - b = 0, b = 1 \dots\dots\dots 5 p$$