



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, Iași

14.02.2014

CLASA a IX-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

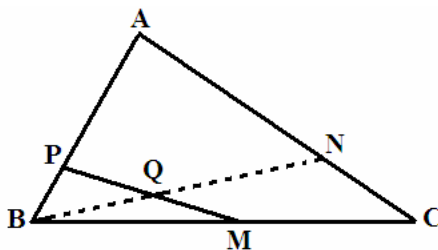
Problema 1.

Fie ABC un triunghi și punctele M, N, P astfel încât $\overline{BM} = \overline{MC}$; $\overline{AN} = 2\overline{NC}$; $\overline{AP} = 3\overline{PB}$ și Q mijlocul segmentului (PM) .

a) Arătați că $\overline{BN} = \frac{2}{3}\overline{BC} + \frac{1}{3}\overline{BA}$ și $\overline{BQ} = \frac{1}{4}\overline{BC} + \frac{1}{8}\overline{BA}$;

b) Demonstrați că punctele B, Q, N sunt coliniare și calculați valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

Rezolvare:



a) $\overline{BN} = \frac{2}{3}\overline{BC} + \frac{1}{3}\overline{BA}$ 2p

$\overline{BQ} = \frac{1}{4}\overline{BC} + \frac{1}{8}\overline{BA}$ 2p

b) $\overline{BQ} = \frac{3}{8}\overline{BN} \Rightarrow B-Q-N$ coliniare 2p

$\frac{BQ}{BN} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{BQ}{QN} = \frac{3}{5}$ 1p

Problema 2.

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu primul termen a_1 și rația r . Calculați:

a) $S_1 = \sum_{k=1}^n a_k^2$



$$b) S_2 = \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}$$

$$c) S_3 = \sum_{1 \leq k < i \leq n} a_k a_i$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} a) S_1 &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)r]^2 = \sum_{k=1}^n [a_1^2 + 2a_1r(k-1) + (k-1)^2 r^2] = \\ &= na_1^2 + 2a_1r \frac{(n-1)n}{2} + r^2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

$$b) S_2 = \sum_{k=1}^n a_k (a_k + r) = \sum_{k=1}^n a_k^2 + r \sum_{k=1}^n a_k = S_1 + \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} r \dots\dots\dots 2p$$

$$\begin{aligned} c) S_1 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 2(a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_1) \Rightarrow 2S_3 = \left[\frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} \right]^2 - S_1 \\ \Rightarrow S_3 &= \frac{1}{2} \left[\frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} \right]^2 - \frac{S_1}{2} \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

Problema 3.

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\frac{1}{10-x} \right] = \frac{1}{10-[x]}$

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{10-[x]} \in \mathbb{Z} \\ [x] \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow 10-[x] \mid 1 \Rightarrow 10-[x] \in \{\pm 1\} \dots\dots\dots 2p$$

$$I. 10-[x]=1 \Rightarrow [x]=9 \Rightarrow x \in [9, 10)$$

$$\left[\frac{1}{10-x} \right] = 1 \Rightarrow \frac{1}{10-x} \in [1, 2) \Rightarrow x \in \left[9; \frac{19}{2} \right) \dots\dots\dots 2p$$



II. $10 - [x] = -1 \Rightarrow [x] = 11 \Rightarrow x \in [11, 12)$

$\left[\frac{1}{10-x} \right] = -1 \Rightarrow \frac{1}{10-x} \in [-1, 0) \Rightarrow x \in [11; 12) \dots\dots\dots 2p$

$x \in \left[9; \frac{19}{2} \right) \cup [11, 12) \dots\dots\dots 1p$

Problema 4.

a) Determinați $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}^*$, $a_1 < a_2 < a_3$ astfel încât $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$

b) Arătați că $\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, există $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ astfel încât

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1.$

Rezolvare:

a) $a_1 = 2; a_2 = 3; a_3 = 6 \dots\dots\dots 2p$

b) Inducție:

$n = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

$n = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = 1 \dots\dots\dots 2p$

Considerăm $P(n)$ adevărată și demonstrăm $P(n + 2)$ adevărată

Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ verifică relația $\Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 2a_n, 3a_n, 6a_n$ verifică relația din $P(n + 2)$.

$P(3), P(4)$ adevărate (+) $P(n) \Rightarrow P(n + 2)$ adevărată $\Rightarrow P(n)$ adevărată $\forall n \geq 3 \dots\dots\dots 3p$