



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014**

CLASA A V-A

Subiectul I (7p)

- a). Aflati numerele naturale a si b astfel incat $(a+b)(a-b-1)=2014$.
b). Exista a si b numere naturale astfel incat $(a^2+b^2+a+b)^2 + (a^2+b^2-a-b)^2 = 2014$?
Argumentati.

Subiectul II (7p)

- a). Sa se scrie $a=10^{2014}$ ca suma de doua patrate perfecte.
b). Sa se scrie $b=6^{2015}$ ca suma de trei cuburi perfecte.

Subiectul III (7p)

Fie $M=\{2014,2015,2016,\dots,2113\}$.

- a). Sa se arate ca oricum am alege 51 numere din multimea M , exista doua a caror suma este un numar prim.
b). Sa se arate ca exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca $X \cup Y = M$ si suma elementelor multimii X este egala cu suma elementelor multimii Y .
c). Sa se arate ca nu exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca $X \cup Y = M$ si produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y .

Subiectul IV (7p)

Se considera 100 puncte pe un cerc. In fiecare punct se inscrie aleator cate un numar natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricaror patru numere inscise in patru puncte consecutive sa fie mai mica decat 203?

(GM. nr.5-2011)

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 2 ore



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014**

CLASA a VI-a

SUBIECTUL I (7p)

Să se determine numerele naturale nenule a și b cu proprietățile: $a+b=2014$ și $[a,b]=(a,b)\cdot 682$, unde $[a,b]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b , iar (a,b) este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

SUBIECTUL II (7p)

Numerele naturale a, b, m verifică relația $2a + 6b - 5m = 0$. Arătați că $a^2 + b^2$ se divide cu 5.

G.M. nr. 9/2013

SUBIECTUL III (7p)

Fie A și B două puncte în plan astfel încât $AB=1m$, M_1 este mijlocul segmentului $[AB]$, M_2 este mijlocul segmentului $[AM_1]$, M_3 este mijlocul segmentului $[AM_2]$ și așa mai departe, M_n este mijlocul segmentului $[AM_{n-1}]$ pentru orice număr natural nenul n .

- a) Calculați lungimea segmentului $[M_5M_4]$.
- b) Determinați numărul n cel mai mic pentru care lungimea segmentului $[AM_n]$ să fie mai mică de 1mm.

SUBIECTUL IV (7p)

Se dau punctele coliniare A, O, B , în această ordine, și punctele C și D de o parte și alta a dreptei AB , astfel încât $m(\widehat{COD}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{AOC}) = 4m(\widehat{AOD})$. Dacă $[OM]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$ și $[ON]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$, se cere:

- a) Determinați măsura unghiului $\widehat{DOM}$;
- b) Determinați măsura unghiului $\widehat{MON}$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 2 ore

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014****CLASA a VII-a****Subiectul I**

Se consideră numerele reale:

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{2014}} \quad \text{și}$$
$$y = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2014}$$

- a) Să se arate că $x = (2 + \sqrt{2})(2^{1007} - 1)$
- b) Să se arate că numărul $n = 2 \left(\frac{y}{x} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} - 1 \right)$ este pătrat perfect.

Subiectul IIDemonstrați că nu există $x, y, z \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = -1$$

Subiectul III

În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului (AC) iar (CE este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BCA$, $E \in (AB)$. Dacă $BD \cap CE = \{P\}$, să se arate că

$$\frac{PC}{PE} - 2 \cdot \frac{PD}{PB} = 1$$

Subiectul IV

Se consideră pătratul ABCD în care punctele G și H sunt mijloacele laturilor DC și respectiv BC. Dreptele AG și AH intersectează diagonala BD în punctele E respectiv F.

- a) Arătați că patrulaterul EFHG este trapez isoscel.
- b) Determinați raportul dintre aria trapezului EFHG și aria pătratului ABCD.

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul efectiv de lucru este 3 ore.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014****CLASA a VIII-a****SUBIECTUL I (7p)**

(3p) **a)** Se consideră numărul $A = n^2 - n - 12$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că, dacă A este divizibil cu 7, atunci A este divizibil cu 98.

(4p) **b)** Să se arate că numărul $B = n^2 + 10n - 3$ nu este divizibil cu 196, pentru orice valoare naturală a numărului n .

SUBIECTUL II (7p)

(1p) **a)** Stabiliți dacă $\frac{1}{\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} < \frac{1}{\sqrt{2013}}$.

(3p) **b)** Arătați că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, pentru orice valoare naturală nenulă a numărului n .

(3p) **c)** Demonstrați că $\frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}} > \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{169}}$.

SUBIECTUL III (7p)

Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$. Punctele P , Q și R sunt proiecțiile punctului A pe dreptele $A'D$, $A'B$ și respectiv $A'C$.

(4p) **a)** Să se arate că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul (PQR) ;

(3p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului PQR , pentru $AB = a$ cm, $a > 0$.

SUBIECTUL IV (7p)

Fie A , B , C și D patru puncte necoplanare așa încât $AB = 6$ cm, $AC = AD = 6\sqrt{2}$ cm și $m\angle(DAB) = m\angle(BAC) = m\angle(CAD) = 90^\circ$.

(2p) **a)** Să se calculeze aria triunghiului BCD ;

(5p) **b)** Să se afle lungimea segmentului AE , unde E este proiecția punctului A pe planul (BCD) .

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Timp de lucru: 3 ore

