

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
- ETAPA LOCALĂ -
10.02.2024
CLASA a IX - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. a) Calculați suma $S = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \dots + [\sqrt{n \cdot (n+1)}], n \in \mathbb{N}^*$.
b) Rezolvați în $\mathbb{R}^*$ ecuația $[x] + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \{x\} + \left[\frac{1}{x} \right]$, unde $[x]$ și $\{x\}$ sunt partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .
2. Coardele $[AB]$ și $[CD]$ ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$ sunt perpendiculare și se intersectează în punctul P. Să se demonstreze relația: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.
3. Fie ABCD un patrulater și punctele M, N, P, Q astfel încât $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.
a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.
b) Arătați că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului NQ.
4. a) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Arătați că $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} > \frac{n-1}{n+2}$
b) Fie $x \in (0, 1)$. Arătați că $x - x^3 < \frac{1}{2}$