

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014
CLASA A IX-A
PROFIL ECONOMIC, SERVICII

1. Fie multimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{6k^2 - 5k + 2}{3k + 2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

a) Sa se determine A

b) Determinati card B, daca card $P(A) + P(B) = 80$ unde $P(A)$ este multimea partilor lui A

Solutie

a) $x = 2k - 3 + \frac{8}{3k+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3k+2 \mid 8 \Rightarrow 3k+2 \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\} \Rightarrow k \in \{-2, -1, 0, 2\} \Rightarrow A = \{-2, -$

$1, 0, 2$

b) $\text{card}(P(A)) = 2^4 - 16 \Rightarrow \text{card}(P(B)) = 64 \Rightarrow \text{card } B = 6$

2. Fie $f: \{1, 2, 3, \dots, 2014, 2015\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$

a) Demonstrati ca daca $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2015) \neq 0$ atunci $f(1) + f(2) + \dots + f(2015) \neq 0$

b) Calculati $f(1) + f(2) + \dots + f(2015)$ pentru $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $f(k) = k^2 + k$

Solutie

a) Din $f(1), \dots, f(2015) \neq 0 \Rightarrow f(k) \in \{\pm 1\} \forall k \in \{1, \dots, 2015\}$ suma $f(1) + \dots + f(2015)$ avand un numar impar de termeni egali cu 1 sau -1 deci este nenul.

$f(1) + \dots + f(2015) = 1^2 + 2^2 + \dots + 2015^2 + 1 + 2 + \dots + 2015 = \frac{2015 \cdot 2016 \cdot 2017}{3}$

3. Calculati $S = \left\{1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\right\} + \left\{2 + \frac{1}{2 \cdot 3}\right\} + \dots + \left\{2014 + \frac{1}{2014 \cdot 2015}\right\}$ unde $\{x\}$ este partea fractionara a lui x

Solutie

$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2014 \cdot 2015} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015}$

4. Se considera un patrat de perimetru P1. Pornind de la el construim un sir de patrute astfel cel de al doilea de perimetru P2 are varfurile mijloacele laturilor primului, cel de al treilea varfurile sunt mijloacele laturilor celui de al doilea, iar cel de al patrulea varfurile sunt mijloacele laturilor celui de al treilea.

a) Aratati ca $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este $\frac{\infty}{\infty}$ cu $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. b) Daca primul patrat are $l=10$, cate din primele 2014 patrate au perimetrele in $\mathbb{Q}$

Solutie

- a) $P_1=4l$; $P_2=4 \cdot \frac{c\sqrt{2}}{2}=2l\sqrt{2}$, $P_3=4 \cdot \frac{l}{2}=2l \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{P_3}{P_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ deci (P_n) este $\frac{\infty}{\infty}$ cu $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- b) $P_1=40$; $P_2=20\sqrt{2}$; $P_3=20$,

deci $P_n \in \mathbb{Q}$ daca n este impar deci 1007 patrate au perimetrul in $\mathbb{Q}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii . Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

Timp de lucru trei ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014
CLASA A X-A
PROFIL ECONOMIC, SERVICII

1. a) Calculați

$$S = \frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \dots + \log_2 2014} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2 + \log_3 3 + \dots + \log_3 2014} + \dots + \frac{1}{\log_{2014} 1 + \log_{2014} 2 + \log_{2014} 3 + \dots + \log_{2014} 2014}$$

b) Sa se rezolve ecuatia $2^{|x+1|} - |2^x - 1| = 2^x + 1$

Solutie

a) $S = \frac{1}{\log_2 2014!} + \frac{1}{\log_3 2014!} + \dots + \frac{1}{\log_{2014} 2014!} = \log_{2014!} 2 + \log_{2014!} 3 + \dots + \log_{2014!} 2014 = 1$

b) Pt $x \in (-\infty, -1)$ ec $2^{-x-1} + 2^x - 1 = 2^x + 1 \rightarrow 2^{-x-1} = 2 \rightarrow -x-1=1 \rightarrow x=-2 \in (-\infty, -1)$

Pt $x \in [-1, 0]$ ec $2^{x+1} + 2^x - 1 = 2^x + 1 \rightarrow 2^{x+1} = 2 \rightarrow x+1=1 \rightarrow x=0$

Pt $x \in [0, \infty)$ ec $2^{x+1} - 2^x + 1 = 2^x + 1 \rightarrow 2^x = 2^x$ sol $\forall x \in [0, \infty)$

Sol $x \in \{-2\} \cup [0, \infty)$

2. Se considera numarul $z_n = i + i^2 + \dots + i^n$ $n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculați z_{2014}

b) Determinați valorile lui n pentru care $z_n \in \mathbb{R}$

c) Solutie

$z_{2014} = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2014}$ pt ca $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

Si se repeat pentru fiecare suma de 4 termeni $\rightarrow$

$z_{2014} = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2009} + i^{2010} + i^{2011} + i^{2012} + i^{2013} + i^{2014} = i + i^2 = i - 1$

$z_n = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^n$

$= i - 1 - i + 1 + \dots + i^n$

$$\begin{cases} 0 & \text{pt } n = 4k \\ 1 & \text{pt } n = 4k + 1 \\ i - 1 & \text{pt } n = 4k + 2 \\ -1 & \text{pt } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Deci $z_n \in \mathbb{R}$ daca $n = 4k$ sau $n = 4k + 3$

3. Dacă $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

a) Calculați z^2 și z^{2014}

b) Dacă $S_1 = \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{2\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \dots + \cos \frac{2014\pi}{4}$

c) $S_2 = \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{2\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} + \dots + \sin \frac{2014\pi}{4}$

Să se calculeze cele doua nummere.

Solutie

a) $z^2 = \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = i$

Pentru z^{2014} scriem z sub forma trigonometrica $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \rightarrow z^{2014} = \cos$

$$\frac{2014\pi}{4} + i \sin \frac{2014\pi}{4} = \cos(251 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}) + i \sin(251 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}) = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

b) Obs ca $S_1 + i S_2 = (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) + (\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4}) + \dots + (\cos \frac{2014\pi}{4} + i \sin \frac{2014\pi}{4}) = z + z^2 + \dots + z^{2014} = z \cdot$

$$\frac{z^{2014} - 1}{z - 1} = (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{\cos \frac{2014\pi}{4} + i \sin \frac{2014\pi}{4} - 1}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} - 1} = (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} - 1}{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} - 1} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) \rightarrow$$

$$S_1 = -1 \quad S_2 = 0$$

4. Fie numerele $x = 2014^{\frac{a-b}{ab}} \cdot 2014^{\frac{b-c}{bc}} \cdot 2014^{\frac{c-a}{ca}}$ unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $ab, bc, ca \geq 2$

$$\text{si } y = 4 \cdot \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2}^{-1})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{2}^{-1})^2}{(2 - 2^{-2})^2 - (2 + 2^{-2})^2}$$

Calculati x si y

Calculati $(x - y - 5)^{2014} + (-x + y + 5)^{2014}$

Solutie

a) $\log_{2014} x = \frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = 0$

Deci $x = 1$ $y = 4 \cdot \frac{2 + 2 + \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2}}{16 - 2 + \frac{1}{16} - 16 - 2 - \frac{1}{16}}$

b) $(1 + 5 - 5)^{2014} + (-1 - 5 + 5)^{2014} = 1 + 1 = 2$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii . Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

Timp de lucru trei ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014
CLASA A XI-A
PROFIL ECONOMIC, SERVICII

1. Se consideră $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $C_{(A)} = \{X \in M_3(C) / AX=XA\}$

a) Să se arate că $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C(A)$

b) Sa se arate ca daca $X \in C(A)$ atunci x este de forma $X = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 3c & 0 & a \end{pmatrix}$

c) Daca $Y \in C(A)$ si $Y^2=O_3$.

Solutie

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ deci } B \in C_{(A)}$$

$$b) \text{ Fie } x = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(G) \quad XA = \begin{pmatrix} 3c & 2b & a \\ 3f & 2e & d \\ 3i & 2h & g \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} g & h & i \\ 2d & 2e & 2f \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$$

$$\text{Din } XA=AX \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 3c & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$c) Y \in C_{(A)} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 3c & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow Y^2=O_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+3c^2 & 0 & 2ac \\ a & b^2 & 0 \\ 6ac & 0 & a^2+3c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a=b=c=0 \Rightarrow$$

$$Y=O_3$$

2. Fie $D = \begin{vmatrix} a+1 & a-1 & a^2-1 \\ b+1 & b-1 & b^2-1 \\ c+1 & c-1 & c^2-1 \end{vmatrix}$ scrieti valoarea lui D ca produs.

Solutie

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+1 & a-1 & a^2-1 \\ b+1 & b-1 & b^2-1 \\ c+1 & c-1 & c^2-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+1 & a-1 & a^2-1 \\ 1 & 1 & b+a \\ 1 & 1 & c+a \end{vmatrix} \begin{matrix} L_3 - L_2 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \cdot \begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (b-a)(c-a)(c-b)$$

3.a) Sa se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a\sqrt{n^2} + b\sqrt{n^2+1} + c\sqrt{n^2+2})$ dacă $a+b+c=0$

b) Sa se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2014x}{\sqrt{x+49}-7}$

Solutie

1) $a = -b-c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (c \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n}} + b \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}) = 0$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2014x}{2014x} \cdot \frac{\sqrt{x+49}+7}{x} \cdot 2014x = 14 \cdot 2014$

4. Se considera $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x \leq 1 \\ bx^2 + ax, & x > 1 \end{cases}$ cu $a, b \in \mathbb{R}$

a) Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x \cdot f(x)} + x) = 1$

Solutie

1) $l_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx - a - b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(a(x+1)+b)}{x-1} = 2a+b$

$l_d = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{bx^2 + ax - a - b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(a+b(x-a))}{x-1} = 2b+a$

dacă $2a+b=2b+a \Rightarrow a=b \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

In caz contrar nu exista

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{bx^3 + ax^2} + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[5]{b + \frac{a}{x}} + 1) = \infty \cdot (\sqrt[5]{b} + 1) = \begin{cases} \pm \infty & b \neq -1 \\ \infty \cdot 0 & \text{pt } b = -1 \end{cases}$

pentru ca limita existent sa fie 1 este necesar sa avem $b = -1$

$$\begin{aligned} \text{pentru } b = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{-x^3 + ax^2} + x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^5 + ax^2 + x^5}{\sqrt[5]{(-x^3 + ax^2)^2} - x^5 \sqrt[5]{ax^2 + x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x^2(\sqrt[5]{(-1+\frac{a}{x})^2} - \sqrt[5]{-1+\frac{a}{x}+1})} = \frac{a}{3} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow a=3 \end{aligned}$$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii . Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

Timp de lucru trei ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2014
CLASA A XI-A
PROFIL ECONOMIC, SERVICII

1. Fie $G = \left\{ A \in M_2(\mathbb{Q}) \mid A = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ b & 2a \end{pmatrix}, 4a^2 - 3b^2 = 1 \right\}$.

- a) Se arată că $(G, \cdot)$ este grup abelian
b) Se arată că G are cel puțin 2014 elemente

Soluție

$\forall A, B \in G$ să avem $A \cdot B \in G$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2a_1 & 3b_1 \\ b_1 & 2a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_2 & 3b_2 \\ b_2 & 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1a_2 + 3b_1b_2 & 6a_1b_2 + 6b_1a_2 \\ 2a_2b_1 + 2a_1b_2 & 3b_1b_2 + 4a_1a_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 4a_1a_2 + 3b_1b_2 & 3(2a_1b_2 + 2a_2b_1) \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & 4a_1a_2 + 3b_1b_2 \end{pmatrix} \text{ verificăm că } 4(2a_1a_2 + \frac{3}{2}b_1b_2)^2 -$$

$$-3(2a_1b_2 + 2a_2b_1)^2 = 1$$

$$16a_1^2a_2^2 + 24a_1a_2b_1b_2 + 9b_1^2b_2^2 - 12a_1^2b_2^2 - 24a_1a_2b_1b_2 - 12a_2^2b_1^2 = 4a_1^2(4a_2^2 - 3b_2^2) - 3b_1^2(4a_1^2 - 3b_1^2) = 4a_1^2 - 3b_1^2 = 1$$

deci $A \cdot B \in G$

$$\text{„}\cdot\text{” e asoc. în } \left. \begin{matrix} M_2(G) \\ G \subset M_2(\mathbb{Q}) \end{matrix} \right| \Rightarrow \text{„}\cdot\text{” asoc. în } G$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2a_2 & 3b_2 \\ b_2 & 2a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_1 & 3b_1 \\ b_1 & 2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a_1a_2 + 3b_1b_2 & 6b_1a_2 + 6a_1b_2 \\ 2a_1b_2 + 2a_2b_1 & 4a_1a_2 + 3b_1b_2 \end{pmatrix} \text{ deci } A \cdot B = B \cdot A$$

$$\forall A, B \in G \Rightarrow \text{„}\cdot\text{” com. în } G$$

$$I_2 \text{ e.n. pentru „}\cdot\text{” matricelor pentru că } I_2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} & 3 \cdot 0 \\ 0 & 2 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ și } 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot 0^2 = 1 \Rightarrow I_2 \in G \Rightarrow I_2 \text{ e.n. pentru „}\cdot\text{” în}$$

G

$$\forall A \in G \exists A' \in G \text{ cu } A \cdot A' = A' \cdot A = I_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4aa' + 3bb' & 3(2ab' + 2a'b) \\ 2ab' + 2a'b & 4aa' + 3bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4aa' + 3bb' = 1 \\ 2ab' + 2a'b = 0 \end{cases} \Rightarrow a' = a \text{ și } b' = -b$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2a & 2(-b) \\ (-b) & 2a \end{pmatrix} \text{ și } 4a^2 - 3 \cdot (-b)^2 \cdot (-b)^2 = 1 \Rightarrow A' \in G \text{ simetricul lui } A$$

Deci $(G, \cdot)$ grup comutativ

2) Pentru ca $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in G$ si $(G, \cdot)$ grup $\Rightarrow A^k \in G \forall k \in \mathbb{N}$ dar puterile lui A nu se repeat $\Rightarrow G$ contine un sir infinit de puteri ale lui A $\Rightarrow$ are cel putin 2014! elemente.

2. Fie $G = (6, \infty)$ si operatia $\circ: G \times G \rightarrow G$ pentru $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42, \forall x, y \in G$.

- Sa se arate ca $x^{\circ}y = (x-6)(y-6)+6$
- Sa se arate ca $(G, \circ)$ este grup abelian
- Sa se rezolve ecuatia $x^{\circ}x^{\circ} \dots^{\circ}x = x$
- Determinati $a, b \in \mathbb{R}$ astfel incat $f_{(x)} = ax+b$ este un izomorfism de la $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la $(G, \circ)$

Solutie

$$1) (x-6)(y-6) + 6 = xy - 6x - 6y + 36 + 6 = x^{\circ}y$$

$$2) \forall x, y \in G \Rightarrow x^{\circ}y = (x-6)(y-6) + 6 \in (6, \infty) = G$$

$$\forall x, y, z \in G \Rightarrow (x^{\circ}y)^{\circ}z = (x-6)(y-6)(z-6) + 6 \quad \text{"\circ"} \text{ asociativa}$$

$$x^{\circ}(y^{\circ}z) = (x-6)(y-6)(z-6) + 6$$

$$\forall x, y \in G \quad xy = (x-6)(y-6) + 6 = (y-6)(x-6) = y^{\circ}x \Rightarrow \text{"\circ"} \text{ comutativa}$$

$$\exists e \in G \text{ a.i. } x^{\circ}e = e^{\circ}x = x \quad (x-6)(e-6) + 6 = x \Rightarrow e-6=1 \quad e=7 \in G$$

$$\forall x \in G \quad x' \in G \text{ a.i. } x^{\circ}x' = x'^{\circ}x = e \Rightarrow (x-6)(x'-6) + 6 = 7 \Rightarrow x' = 6 + \frac{1}{x-6} \in G$$

Deci $(G, \circ)$ grup comutativ

$$3) \text{ Prin inductie demonstram ca } x^{\circ} \dots^{\circ}x = (x-6)^n + 6 \text{ ec devine } (x-6)^{2014} + 6 = 1 \Rightarrow x-6=1 \Rightarrow x=7$$

$$4) f(e_1) = e_2 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 7 \quad b = 7 - a \Rightarrow f_{(x)} = a \cdot x + 7 - a \text{ pentru ca } f \text{ sa fie bijectiva este necesar ca } \text{Im} f = \mathbb{R} \Rightarrow a > 0$$

$$\text{si } (7-a, \infty) = (6, \infty) \Rightarrow 7-a=6 \Rightarrow a=1$$

$$\text{deci } f_{(x)} = x+6 \quad f'_{(x)} = 1$$

x	0	∞
$f'_{(x)}$	+++++	
f(x)	2	∞

Din table $\Rightarrow f$ bijectiva

$$f_{(x*y)} = f_{(x)} \circ f_{(y)} \quad f_{(xy)} x \cdot y + 6$$

$$f_{(x)} \circ f_{(y)} = (f_{(x)} - 6)(f_{(y)} - 6) + 6 = (x + 6 - 6)(y + 6 - 6) + 6 = xy + 6$$

deci f morfism din ambele $\Rightarrow f$ izomorfism

$$3. a) \int \frac{2e^{\arctg x} + 3x \ln(x^2 + 1) + 7}{x^2 + 1} dx, x \in \mathbb{R}$$

$$b) \int \frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} dx, f(x) = e^{\arctg x}, x \in \mathbb{R}$$

Solutie

$$a) I_1 = 2e^{\arctg x} + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + 7 \arctg x + c$$

$$b) I_2 = \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right) dx = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x^2} + c$$

4. Sa se arate ca nu exista functii $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ care admit primitive astfel incat pentru o primitive F a lui f sa avem $F(x) \cdot F(1-x) = F(x^2), \forall x \in \mathbb{R}$

Solutie

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii . Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

Timp de lucru trei ore.