

Barem – Clasa a V-a

SUBIECTUL I

- a) Arătați că numărul $x = \overline{74a} + \overline{4a7} + \overline{a74}$ este divizibil cu 37, oricare ar fi cifra nenulă a .
- b) Găsiți restul împărțirii numărului $y = 2019 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2018)$ la 2018.
- c) Stabiliți că numărul $z = 3^{2n+3} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}$ este pătrat perfect, pentru orice număr natural n .

Rezolvare:

a) $x = 740 + a + 407 + 10a + 100a + 74 = 1221 + 111a = 111 \cdot (11 + a) = 37 \cdot 3 \cdot (11 + a) : 37 \dots \dots \dots (2p)$

b) $y = 2019 + 2018 \cdot 2019 = 2018 \cdot 2020 + 1$, deci restul va fi 1
.....(3p)

c) $z = 3^{2n+3} \cdot 4^{2n+1} \cdot (16 - 2^2) = 3^{2n+3} \cdot 4^{2n+1} \cdot 3 \cdot 4 = (3^{n+2} \cdot 4^{n+1})^2 - \text{pătrat perfect} \dots \dots \dots (2p)$

Subiectul II

Andrei a rezolvat luni un sfert din problemele pe care și le-a propus pentru o săptămână, marți a rezolvat o treime din cele rămase, iar miercuri a rezolvat jumătate din cele nou rămase și a constatat că i-au mai rămas de rezolvat 12 probleme. Câte probleme și-a propus să rezolve Andrei în acea săptămână?

Gazeta Matematică

Rezolvare:

Luni rezolvă o pătrime, deci rămân trei pătrimi. Marți rezolvă o treime din cele trei pătrimi, adică o pătrime. Rămân încă două pătrimi. Miercuri rezolvă jumătate din cele două pătrimi, adică o pătrime. Rămâne așadar cu încă o pătrime de rezolvat, adică cu 12 probleme. Dacă o pătrime din numărul total de probleme este egal cu 12, atunci numărul total de probleme este $12 \cdot 4 = 48 \dots \dots \dots (7p)$

Subiectul III

Notăm cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n .

- a) Arătați că $u(n^2) \in \{0; 1; 4; 5; 6; 9\}$ și $u(n^4) \in \{0; 1; 5; 6\}$, pentru orice număr natural n .
- b) Arătați că $u(m^4 + n^4) \in \{0; 1; 2; 5; 6; 7\}$, indiferent de alegerea numerelor naturale m și n .
- c) Demonstrați că nu există 4 numere naturale a, b, c, d astfel încât:

$$a^4 + b^4 + c^4 = 5 \cdot d^2 + 4$$

Rezolvare:

a)

$u(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(n^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$u(n^4)$	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

Din tabel se observă că $u(n^2) \in \{0; 1; 4; 5; 6; 9\}$ și că $u(n^4) \in \{0; 1; 5; 6\}$.

.....(3p)

b)

$u(m^4 + n^4)$		$u(m^4)$			
		0	1	5	6
$u(n^4)$	0	0	1	5	6
	1	1	2	6	7
	5	5	6	0	1
	6	6	7	1	2

Din tabel găsim că $u(m^4 + n^4) \in \{0; 1; 2; 5; 6; 7\}$.

.....(2p)

c)

$u(a^4 + b^4 + c^4)$		$u(a^4 + b^4)$					
		0	1	2	5	6	7
$u(c^4)$	0	0	1	2	5	6	7
	1	1	2	3	6	7	8
	5	5	6	7	0	1	2
	6	6	7	8	1	2	3

Continuând tot cu un tabel găsim că: $u(a^4 + b^4 + c^4) \in \{0; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 8\}$ și că $u(5 \cdot d^2 + 4) \in \{4; 9\}$. Deci: $a^4 + b^4 + c^4 \neq 5 \cdot d^2 + 4$, deoarece cele două expresii nu pot avea aceeași ultimă cifră.....(2p)

Subiectul IV

a) Comparați 10^{30} cu 2^{100} și 10^{28} cu 2^{91} .

b) Aflați câte cifre are numărul 2^{100} încadrându-l între două puteri consecutive ale lui 10.

c) Demonstrați că suma cifrelor numărului 2^{100} este mai mică sau egală cu 273.

Rezolvare

a) Din $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3 \Rightarrow 2^{100} = (2^{10})^{10} > (10^3)^{10} = 10^{30}$ (2p)

Totodată: $5^4 = 625 > 512 = 2^9 \Rightarrow 10^4 = 2^4 \cdot 5^4 > 2^4 \cdot 2^9 = 2^{13} \Rightarrow (10^4)^7 > (2^{13})^7 = 2^{91} \Rightarrow 10^{28} > 2^{91}$ (1p)

b) Așadar: $10^{28} \cdot 2^9 > 2^{91} \cdot 2^9 = 2^{100} \Rightarrow 10^{31} = 10^3 \cdot 10^{28} > 512 \cdot 10^{28} > 2^{100} > 10^{30}$. Întrucât între cele două numere între care a fost încadrat 2^{100} există doar numere cu 31 de cifre, concluzionăm că și 2^{100} are tot 31 de cifre.....(1p)

c) Numărul cu cea mai mare sumă a cifrelor cuprins între $\underbrace{512\,000\dots000}_{28}$ și $\underbrace{1\,000\dots000}_{30}$ este $\underbrace{4\,999\dots999}_{30}$. Acesta are suma cifrelor: $4 + 9 \cdot 30 = 274$. Nu mai există alt număr cuprins între cele două valori cu aceeași sumă a cifrelor. Cum $2^{100} \neq \underbrace{4\,999\dots999}_{30}$ (fiind număr impar), deducem că suma cifrelor lui 2^{100} este mai mică sau egală cu 273

.....

(3p)

Observație: În realitate suma cifrelor lui 2^{100} este 115.