

Olimpiada de matematică
Faza locală
9 februarie 2013
Clasa a IX-a

Problema 1.a) Fie $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}, \quad \forall k \in \mathbf{N}^*, k \leq n.$$

b) Să se arate că

$$2^n + 1 < 2^{n + \frac{1}{2^{n-1}}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Problema 2.Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația

$$x - 1 + x - 2 + x - 3 + \dots + x - 2013 = 2012x - 2010.$$

Problema 3.

Se consideră un triunghi ABC și D, E, F intersecțiile medianelor din A, B , respectiv C cu cercul circumscris triunghiului. Să se arate că dacă $AD + BE + CF = 0$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Problema 4.

În paralelogramul $ABCD$ fie $BM = \frac{2}{3}BA$, $AN = \frac{1}{4}AD$, $CM \cap BN = T$.

- Calculați valoarea raportului $\frac{BT}{BN}$;
- Dacă $BD \cap CM = P$, demonstrați, că dreptele AP, BN, DM sunt concurente.

Observație

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă valorează 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.