

SOLUTII SI BAREM
CLASA A X - A
ETAPA LOCALĂ 15.02.2015

Problema 1:

a) $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ **(2p)**

b) *Folosind punctul a) avem* $\log_a \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} \geq \log_a \frac{b+c+d}{3} \geq \log_a \sqrt[3]{bcd} = \frac{1}{3}(\log_a b + \log_a c + \log_a d)$ **(3p)**

Corespunzător se scriu celelalte trei inegalități și se însumează; notând cu A membrul stâng al inegalității de demonstrat obținem:

$$A \geq \frac{1}{3} \sum (\log_a b + \log_b a) \geq \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2 = 4$$

(2p)

Problema 2:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{ax_1^3 + 1}{x_1} - \frac{ax_2^3 + 1}{x_2} = ax_1^2 - ax_2^2 + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \\ &= a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = \\ &= \frac{[a(x_1 + x_2)x_1 x_2 - 1](x_1 - x_2)}{x_1 x_2} \end{aligned}$$

(1p)

Dacă $a = 0$ și $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă $x_1 = x_2$ deci funcția f este injectivă **(1p)**

Dacă $a \neq 0$, există $a, x_1, x_2, x_1 \neq x_2$ astfel încât $a(x_1 + x_2)x_1 x_2 - 1 = 0$ adică $f(x_1) = f(x_2)$ și f nu ar fi injectivă. Justificăm afirmația:

Fie $s = x_1 + x_2$ și $p = x_1 x_2$ obținem $asp - 1 = 0$ sau $sp = \frac{1}{a}$.

Ecuatia de gradul al doilea cu radacinile x_1 și x_2 este $x^2 - sx + p = 0$.

Alegem $s = \frac{2}{\sqrt[3]{a}}$ și $p = \frac{2}{2\sqrt[3]{a^2}}$ Atunci discriminantul ecuatiei

$\Delta = s^2 - 4p = \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} > 0$, deci radacinile x_1 și x_2 sunt reale și $x_1 \neq x_2$ **(3 p)**

Concluzionăm că $f(x) = \frac{1}{x}, f: \mathbb{R}^* \rightarrow M$

Ecuatia $f(x) = y$ are solutia $x = \frac{1}{y}, y \in \mathbb{R}^*$ deci functia este surjectiva, astfel ca este bijectiva.

(1p)

Deoarece $y \in \mathbb{R}^*$ rezultă $M = \mathbb{R}^*$

(1p)

Problema 3:

Fie $z_k = a_k + i b_k, k = \overline{1, 2015}, a_k, b_k \in \mathbb{R}, i^2 = -1$

$\sum_{k=1}^{2015} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^{2015} (a_k^2 + b_k^2); \operatorname{Re}(z_k z_{k+1}) = a_k a_{k+1} - b_k b_{k+1}, k = \overline{1, 2015}, b_{2016} = b_1, a_{2016} = a_1$

(1p)

Egalitatea din enunț devine: $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2015}^2 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{2015}^2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{2015} a_1 - b_1 b_2 - b_2 b_3 - \dots - b_{2015} b_1$ sau

(1p)

$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_{2015} - a_1)^2 + (b_1 + b_2)^2 + (b_2 + b_3)^2 + \dots + (b_{2015} + b_1)^2 = 0$

(2p)

Și de aici: $a_1 = a_2 = \dots = a_{2015} = a \in \mathbb{R}$ și $b_1 = b_2 = \dots = b_{2015} = 0$

(2p)

Rezultă $z_1 + \dots + z_{2015} = 2015a \in \mathbb{R}$ $z_1 \dots z_{2015} = a^{2015} \in \mathbb{R}$

(1p)

Problema 4:

În b) înlocuim x și y cu 1: $f(1) + f(1) \geq f(1) \Rightarrow f(1) \geq 0$

(1p)

În a) înlocuim x cu $\frac{1}{x}$: $f\left(\frac{1}{x}\right) \leq g\left(\frac{1}{x}\right)$. Din proprietatea funcției date g deducem

$$g\left(\frac{1}{x}\right) \leq -g(x) \text{ și rezultă } f\left(\frac{1}{x}\right) \leq -g(x) \text{ adică } -f\left(\frac{1}{x}\right) \geq g(x) \quad (1)$$

(2p)

Din condiția b) găsim $f(1) \leq f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ prin înlocuirea lui y cu $\frac{1}{x}$. Cum $f(1) \geq 0$

$$\text{Rezultă } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \quad (2)$$

(2p)

Adunăm inegalitățile (1) și (2) și rezultă $f(x) \geq g(x)$.

(1p)

Având în vedere a), obținem $f(x) = g(x)$ este singura funcție care satisface condițiile date.