

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

1. Fie numărul $N = 13 + 13^2 + 13^3 + \dots + 13^{2020}$
a) Să se determine ultima cifră a numărului N ;
b) Să se arate că numărului N se divide cu 17.

Rezolvare

- a) Se grupează termenii câte 4 și se dă factor comun pe 13
 $N = 13(1 + 13 + 13^2 + 13^3) + 13^5(1 + 13 + 13^2 + 13^3) + \dots + 13^{2017}(1 + 13 + 13^2 + 13^3) = \dots 4 \text{ p}$
 $= 2380(13 + 13^5 + \dots + 13^{2017}) \Rightarrow u(N) = 0 \dots 3 \text{ p}$
b) $2380 = 17 \cdot 140 \Rightarrow N : 17 \dots 2 \text{ p}$

2. Să se compare numerele a și b dacă:

- a) $a = 2 \cdot 3^{82} + 3^{83}$ și $b = 2^{123} + 2^{125}$
b) $a = 5 \cdot 2^n + 2^{n+1} + 2^n$ și $b = 3^{n+2} + 15 \cdot 3^n + 3^{n+1}$

Rezolvare

- a) $a = 3^{82}(2 + 3) = (3^2)^{41} \cdot 5 = 9^{41} \cdot 5 \dots 1,5 \text{ p}$
 $b = 2^{123}(1 + 4) = (2^3)^{41} \cdot 5 = 8^{41} \cdot 5 \dots 1,5 \text{ p}$
 $\Rightarrow a > b \dots 1,5 \text{ p}$
b) $a = 2^n(5 + 2 + 1) = 2^n \cdot 8 = 2^{n+3} \dots 1,5 \text{ p}$
 $b = 3^n(9 + 15 + 3) = 3^n \cdot 27 = 3^{n+3} \dots 1,5 \text{ p}$
 $\Rightarrow b > a \dots 1,5 \text{ p}$

3. Cinci creioane, patru caiete și două ascuțitoare costă 24 de lei. Două creioane, trei caiete și patru ascuțitoare, de același fel costă 17 lei. Trei creioane, două caiete și trei ascuțitoare, de același fel costă 15 lei. Cât costă împreună un creion, un caiet și o ascuțitoare?

Rezolvare

- 5 creioane ... 4 caiete ... 2 ascuțitoare ____ 24 lei
2 creioane ... 3 caiete ... 4 ascuțitoare ____ 17 lei
3 creioane ... 2 caiete ... 3 ascuțitoare ____ 15 lei..... 1 p
Se dublează prima linie și se compară cu a doua
10 creioane ... 8 caiete ... 4 ascuțitoare ____ 48 lei
2 creioane ... 3 caiete ... 4 ascuțitoare ____ 17 lei..... 1 p
Rezultă: 8 creioane ... 5 caiete ____ 31 lei (1)..... 1 p
Se adună primele două linii și se dublează a treia
7 creioane ... 7 caiete ... 6 ascuțitoare ____ 41 lei
6 creioane ... 4 caiete ... 6 ascuțitoare ____ 30 lei..... 1 p
Rezultă: 1 creion ... 3 caiete ____ 11 lei (2)..... 1 p
Se înmulțește cu 8 și se compară cu (1)
8 creioane ... 24 caiete ____ 88 lei
8 creioane ... 5 caiete ____ 31 lei..... 1 p
Rezultă: 19 caiete ____ 57 lei, deci un caiet costă 3 lei 1 p
Din (2) rezultă: un creion costă $11 - 9 = 2$ (lei) 0,5 p
3 ascuțitori costă $15 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 3$ (lei), deci o ascuțitoare costă 1 leu..... 1 p
Un creion, un caiet și o ascuțitoare costă $2 + 3 + 1 = 6$ (lei)..... 0,5 p

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

4. a) Se dau 5 numere naturale oarecare. Să se arate că putem alege câteva dintre ele astfel încât suma lor să se dividă cu 5.

b) Să se arate că oricum am alege patru numere naturale există cel puțin două dintre ele pentru care suma sau diferența pătratelor lor se divide cu 5.

Rezolvare

a) Fie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cele cinci numere. Formăm sumele:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Dacă una dintre aceste sume se divide cu 5 problema este rezolvată.....1 p

Dacă niciuna dintre aceste sume nu se divide cu 5, atunci prin împărțire la 5 sunt posibile resturile 1, 2, 3, 4.....1 p

Având cinci sume vor exista cel puțin două care să dea același rest prin împărțire la 5.

Atunci diferența lor este divizibilă cu 5. Diferența lor reprezintă suma câtorva dintre ele.

(Ex. $S_5 - S_3 = a_4 + a_5$).....1 p

b) Un pătrat perfect are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.....1 p

Considerăm trei cutii, o cutie conține pătrate perfecte care au ultima cifră 0 sau 5, a doua cutie conține pătrate perfecte care au ultima cifră 1 sau 9, a treia cutie conține pătrate perfecte care au ultima cifră

4 sau 6. Pentru că sunt patru numere rezultă că există cel puțin o cutie cu cel puțin două numere.....2 p

Dacă pătratele celor două numere au aceeași ultimă cifră, atunci diferența lor are ultima cifră 0 și se divide cu 5.....1 p

Dacă pătratele celor două numere au ultima cifră diferită, atunci suma lor are ultima cifră 0 sau 5 și se va divide cu 5.....1 p