

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^)$, $n \in \mathbb{N}$ impar*

Dacă $A \cdot A^t = I_n$, arătați că $\det(A^2 - I_n) = 0$, unde A^t este transpusa matricei A

Soluție:

$$\det(A^2 - I_n) = \det(A^2 - A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A - A^t) \quad (1) \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Dar } \det(A - A^t) = \det(A - A^t)^t = \det(A^t - A) = (-1)^n \det(A - A^t) = -\det(A - A^t)$$

$$\Rightarrow \det(A - A^t) = 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \det(A^2 - I_n) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ pentru $n \geq 1$. Să se calculeze:

$$a.) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad b.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Gazeta matematică

Soluție:

a.) Se arată că $a_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Deoarece $a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - 1 - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent 2p

Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $l = 2^l - 1 \Rightarrow l = 0$ sau $l = 1$

Cum șirul este descrescător, $l = 0$2p

b.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2$$

.....3p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimile $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

- i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nesingulare;
- ii.) $\forall X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

Soluție:

Fie $X \in \mathcal{A}$, $X \neq I_2 \Rightarrow X^n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}$ a.î. $X^p = X^q$

$$\Rightarrow X^{p-q} = I_2 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X, I_2 \in \mathcal{A} \dots\dots\dots 2p$$

- 1) Dacă $X^2 = I_2$, fie $\mathcal{A} = \{I_2, X, Y\} = \{I_2, X, Y^2, XY\} = \{X, I_2, XY\}$
Deci, $XY = Y \Rightarrow Y = I_2$, contradicție 1p
- 2) Dacă $X^2 \neq I_2$ cum $X^2 \neq X \Rightarrow X^3 = I_2$ deci, $\mathcal{A} = \{I_2, X, X^2\}$ 1p

Determinăm toate matricele X cu $X^3 = I_2$

$$\det(X) = 1; X^2 - \text{Tr}(X) \cdot X + I_2 = 0_2 \Rightarrow X^2 = \text{Tr}(X) \cdot X - I_2 \Rightarrow$$

$$X^3 = \text{Tr}(X) \cdot X^2 - X \Rightarrow I_2 = \text{Tr}(X)(\text{Tr}(X)X - I_2) - X \Rightarrow (\text{Tr}(x)^2 - 1)X = (\text{Tr}(X) + 1)I_2$$

$$\text{Dacă } \text{Tr}(X) = -1 \Rightarrow X^2 + X + I_2 = 0_2$$

$$\text{Fie } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+d = -1 \\ ad-bc = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{există o infinitate de matrice } X \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dacă } \text{Tr}(X) \neq -1 \Rightarrow (\text{Tr}(X) - 1)X = I_2 \Rightarrow X = \frac{1}{\text{Tr}(X) - 1} \cdot I_2 \text{ și}$$

$$\det(x) = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\text{Tr}(X)-1}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{Tr}(x) = 2 \text{ sau } \text{Tr}(x) = 0 \text{ caz care nu convine} \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI –a

PROBLEMA 4.

Fie $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că există $c \in (0,1]$ astfel încât:

$$f(c) + g(c) \neq \sin \frac{1}{c}$$

Procedăm prin reducere la absurd

Presupunem

$$f(x) + g(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0,1] \quad \dots\dots\dots 2p$$

Fie șirul

$$(x_n)_{n \geq 1} \text{ cu } x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \quad n \geq 1 \Rightarrow \sin \frac{1}{x_n} = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ $y_n = (-1)^n$ nu este convergent (1) 2p

Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = f(x_n)$ și $b_n = g(x_n) \quad \forall n \geq 1$ sunt monotone și mărginite, deci convergente. 2p

Așadar $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$, este convergent contradicție cu (1). 1p

Notă:

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător;