

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală Dâmbovița - 21 Februarie 2016

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Demonstrați că mulțimea

$$G = \left\{ A_x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A_x = \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^* \right\},$$

înzestrată cu operația de înmulțire a matricelor, este grup. Este izomorf cu $(\mathbb{R}^*, \cdot)$?

Subiectul 2. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită pentru orice număr real x prin formula $f(x) = x^5 + x$, este bijectivă, apoi calculați:

$$\int_0^2 f^{-1}(x) \, dx.$$

Subiectul 3. Calculați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{n^2}{k^2} \right)}.$$

GM

Subiectul 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup și mulțimea $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}$. Arătați că, dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul G este comutativ.

GM