

Clasa a IX - a

Problema 1. Demonstrați că, dacă șirurile de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$, $(z_n)_{n \geq 1}$, îndeplinesc condițiile :

a. $x_n, y_n, z_n \in [\sqrt{2}, 2], (\forall)n \geq 1;$

b. $x_n^2 \geq y_n^2 + z_n^2, (\forall)n \geq 1.$

atunci ele sunt șiruri constante.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: a. $\Rightarrow x_n^2 \leq 4 \leq y_n^2 + z_n^2$; b. $\Rightarrow x_n^2 = 4 = y_n^2 + z_n^2 \Rightarrow x_n = 2, y_n = z_n = \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$, $2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$ și $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$. Să se arate că ANMP este romb dacă și numai dacă $2|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$.

ANMP este paralelogram și diagonalele sunt perpendiculare dacă și numai dacă AC=CM.

Problema 2. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$, $2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NB}$ și $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$. Să se arate că ANMP este romb

Corina Ionescu, Călărași

Soluție: ANMP paralelogram; ANMP romb $\Rightarrow \Delta ACM$ echilateral $\Rightarrow m(\angle ABC) = 30^\circ \Rightarrow 2|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$;

$2|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow m(\angle ABC) = 30^\circ \Rightarrow \Delta ACM$ echilateral $\Rightarrow ANMP$ romb.

Problema 3. Se consideră $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ și $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dacă numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt în progresie geometrică cu rația m, atunci determină toate numerele $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, pentru care există $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$ și numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_k$ cu proprietățile:

c. numerele $x_1, x_2, \dots, x_k$ sunt în progresie aritmetică;

d. $x_1 = a_1$ și $x_k = a_{n-1}$;

e. $x_1 + x_2 + \dots + x_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție: $x_1 + x_2 + \dots + x_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \Leftrightarrow \frac{(a_1 + a_1 m^{n-2})k}{2} = a_1(1 + m + m^2 + \dots + m^{n-1}) \Leftrightarrow$

$$k = \frac{2(1 + m + m^2 + \dots + m^{n-1})}{1 + m^{n-2}}; \text{ presupunem } n = 3 \Rightarrow k = 2\left(1 + \frac{m^2}{1 + m}\right); \text{ dacă } p \text{ este un număr prim}$$

astfel încât $p|m$ și $p|m+1 \Rightarrow p=1; m+1 \geq 3$ și $\frac{m^2}{1+m}$ ireductibilă implică $k \notin \mathbb{N}$, contradicție;

presupunem $n = 4 \Rightarrow k = 2(1+m) \in \mathbb{N}, 2(1+m) \geq 3$; presupunem $n \geq 5 \Rightarrow$

$$k = 2(m+1) + \frac{2(m^2 + \dots + m^{n-3})}{1 + m^{n-2}}; 0 < \frac{2(m^2 + \dots + m^{n-3})}{1 + m^{n-2}} < 1 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}; n = 4 \text{ este singura soluție.}$$

Problema 4. Determină toate funcțiile $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, care respectă, simultan, condițiile:

i. Există $a \in \mathbb{N}^*$, cu proprietatea $f(a) = 1$.

ii. Dacă $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ și $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$, atunci $\frac{1}{f(k)} + \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{f(n)}$.

Soluție: $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(n+1)} + \frac{1}{f(n(n+1))} > \frac{1}{f(n+1)} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(n+1) > f(n);$ presupunem $a > 1 \Rightarrow f(a) > f(1) \geq 1 \Rightarrow 1 > 1$, contradicție $\Rightarrow a = 1$;
 $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(2n)} + \frac{1}{f(2n)} \Rightarrow f(2n) = 2f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; f(2n) = 2f(n)$ și
 $f(1) = 1 \Rightarrow f(2^k) = 2^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$; funcția f strict crescătoare, $f(2^{k-1}) = 2^{k-1}$ și $f(2^k) = 2^k$,
 $\forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n) = n, \quad \forall n \in \{2^{k-1}, 2^{k-1} + 1, \dots, 2^k\}$; există o singură funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ care
 respectă, simultan, condițiile i. și ii.

Clasa a X - a

Problema 1. Arătați că, oricare ar fi numerele reale $x, y \in (1, \infty)$, are loc inegalitatea :

$$(\lg \sqrt{10 \cdot x})^2 + (\lg \sqrt[3]{10 \cdot y})^2 \geq \frac{(\lg 100 \cdot x \cdot y)^2}{13}.$$

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: $(\lg \sqrt{10 \cdot x})^2 = \frac{(\lg x + 1)^2}{4}; (\lg \sqrt[3]{10 \cdot y})^2 = \frac{(\lg y + 1)^2}{9}; \frac{(\lg 100 \cdot x \cdot y)^2}{13} = \frac{(\lg x + \lg y + 2)^2}{13};$
 $a = \lg x + 1, b = \lg y + 1 \Rightarrow (\lg \sqrt{10 \cdot x})^2 + (\lg \sqrt[3]{10 \cdot y})^2 \geq \frac{(\lg 100 \cdot x \cdot y)^2}{13} \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{9} \geq \frac{(a+b)^2}{13} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (9a - 4b)^2 \geq 0.$

Problema 2. Se consideră $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \varepsilon^3 = 1$ și $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Afixele numerelor complexe $\frac{1+\varepsilon}{2} \cdot z, \varepsilon^2 \cdot z, \varepsilon \cdot z$, sunt punctele A, B, C , punctul M este mijlocul segmentului $[BC]$, punctul $N \in [AB]$ astfel încât $3AN = AB$ și punctul P este mijlocul segmentului $[CN]$. Demonstrați că patrulaterul $ANMP$ este romb.

Corina Ionescu, Călărași

Soluție: punctele M, N, P sunt afixe numerelor complexe $-\frac{1}{2}z, 0, \frac{1}{2}\varepsilon \cdot z$;

$$AN = NM = MP = PA = \frac{1}{2}|z| \Rightarrow \text{patrulaterul } ANMP \text{ este romb.}$$

Problema 3. Rezolvă ecuația $\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) = 900.$

Soluție: $x < 0 \Rightarrow \left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) < 4;$

$$\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) \geq 4\sqrt{625^x \cdot 5^{\frac{1}{x}}} \cdot \sqrt{81^x \cdot 3^{\frac{1}{x}}} = 4 \cdot 15^{2x + \frac{1}{2x}} \geq 4 \cdot 15^2 = 900;$$

$$\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) = 900 \Leftrightarrow 2x + \frac{1}{2x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Problema 4.

Să se determine funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\ln(xy) \leq f(x) + f(y) - x - y \leq f(xy) - xy, \quad \forall x, y \in (0, \infty).$$

Soluție: $\ln(xy) \leq f(xy) - xy, \quad \forall x, y \in (0, \infty) \Rightarrow t + \ln(t) \leq f(t), \quad \forall t \in (0, \infty); \quad x = y = 1 \Rightarrow 0 \leq f(1) - 1 \leq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(1) = 1; \quad y = \frac{1}{x} \Rightarrow 0 \leq f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \left(f(x) - x\right) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f(x) - \ln x - x\right) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = -\ln x - \ln \frac{1}{x} = 0;$$

presupunem că $\exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $t + \ln(t) < f(t) \Rightarrow \left(f(t) - \ln t - t\right) + \left(f\left(\frac{1}{t}\right) - \ln \frac{1}{t} - \frac{1}{t}\right) > 0 \Rightarrow 0 > 0,$

contradicție; $f(x) = \ln x + x, \quad \forall x \in (0, +\infty).$

Clasa a XI - a

Problema 1. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $A + B = AB$. Demonstrează că $AB = BA$.

Soluție: $A + B = AB \Leftrightarrow (I_3 - A)(I_3 - B) = I_3 \Rightarrow \exists (I_3 - A)^{-1}$ în $M_3(\mathbb{C})$ și $(I_3 - A)^{-1} = I_3 - B \Rightarrow$

$$\Rightarrow (I_3 - B)(I_3 - A) = I_3 \Leftrightarrow A + B = BA; \quad A + B = AB \text{ și } A + B = BA \Rightarrow AB = BA.$$

Problema 2.

Determinați matricele $A \in M_2(\mathbb{R})$, cu proprietățile $\det(A^2 + I_2) \neq 0$ și $A^{2017} + A^{2015} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Florin Ștefan Marcu, Călărași

Soluție: $A^{2017} + A^{2015} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\det A)^{2015} \cdot \det(A^2 + I_2) = 0 \Leftrightarrow \det A = 0; \quad \text{tr} A = x \Rightarrow$

$$A^2 - xA + (\det A)I_2 = 0_2 \Leftrightarrow A^2 = x \cdot A \Rightarrow A^{2017} = x^{2016} \cdot A \text{ și } A^{2015} = x^{2014} \cdot A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^{2016} + x^{2014}) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1); \quad \text{dacă } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ din (1) rezultă } a = b = c = d = \frac{x}{2}; \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^{2017} + x^{2015} = 2 \Leftrightarrow x = 1; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ este singura soluție.}$$

Problema 3.

a) Șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este definit prin $a_1 = \sin^2 \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și $a_{n+1} = \sin^2 a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Demonstrează că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

(Notă: Se consideră cunoscut că $\sin x < x, \quad \forall x \in (0, \infty)$)

b) Fie p și q sunt două numere naturale cu proprietățile cu proprietatea $\sqrt{pq} \notin \mathbb{N}$. Pentru fiecare număr natural nenul n se definesc numerele naturale a_n și b_n din egalitatea

$$(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n} = a_n + b_n \sqrt{pq}. \quad \text{Calculează } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n}.$$

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Soluție: a) $a_n \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit (1);

$a_{n+1} - a_n = \cos 2a_{n-1} - \cos 2a_n = \sin(a_n + a_{n-1})\sin(a_n - a_{n-1})$; $a_n + a_{n-1} \in [0, 2] \subset [0, \pi] \Rightarrow a_{n+1} - a_n$ și $a_n - a_{n-1}$ au același semn (2); $a_2 = \sin^2 a_1 \leq \sin a_1 \leq a_1 \Rightarrow a_2 - a_1 \leq 0$ (3); din (2) și (3) rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător (4); din (1) și (4) rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

$$\text{b) } \frac{b_n}{a_n} = \sqrt{pq} \frac{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n} - (\sqrt{p} - \sqrt{q})^{2n}}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n} + (\sqrt{p} - \sqrt{q})^{2n}} = \sqrt{pq} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}}\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}}\right)^{2n}}; \quad -1 < \frac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} < 1; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \sqrt{pq}.$$

Problema 4. Dacă $0 < a < 1 < b$, determină $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a^b + 1)(a^b + 2) \cdots (a^b + n)}{(b^a + 1)(b^a + 2) \cdots (b^a + n)}$.

(Notă: Se consideră cunoscut că $\ln(1+x) < x$, $\forall x \in (0, \infty)$ și că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$)

Florica Anastase, Lehtiu Gară

Soluție: $x_n = \frac{(a^b + 1)(a^b + 2) \cdots (a^b + n)}{(b^a + 1)(b^a + 2) \cdots (b^a + n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $x_n = e^{\ln x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$\ln x_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{a^b - b^a}{b^a + k} \right) \leq (a^b - b^a) \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{b^a + k} \right) \leq (a^b - b^a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; \quad a^b - b^a < 0 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Clasa a XII - a

Problema 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_t = \frac{t}{3}A + \frac{1}{3t^2}B$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

și $G = \{M_t \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

a) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup ($\cdot$ este operația de înmulțire a matricelor).

b) Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow G$, $f(t) = M_t$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ la grupul $(G, \cdot)$.

Soluție: $M_t \cdot M_u = M_{tu}$, $\forall t, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Problema 2. Fie $(G, \circ)$ și $(G, *)$ două grupuri definite pe aceeași mulțime G , care au același element neutru și care verifică $x * y = (x \circ x) \circ (x \circ y)$, $\forall x, y \in G$. Să se arate că cele două legi de compoziție coincid și că grupul definit este comutativ.

Soluție: $x * e = (x \circ x) \circ (x \circ e) \Leftrightarrow x \circ x = e$, $\forall x \in G \Rightarrow x * y = x \circ y$, $\forall x, y \in G$; $x \circ x = e \Rightarrow (G, \circ)$ grup comutativ.

Problema 3. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$ și $g(x) = f(x) + f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Calculează $\int e^x f(x) dx$.

b) Determină o primitivă G a lui g cu proprietatea $G(0) = 2017$.

c) Calculează $\int_0^1 f(x) dx$.

Soluție: a) $\int e^x f(x) dx = \arctg e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$; b) $\int g(x) dx = \int \left(\frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right) dx = x + c$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow G(x) = x + 2017$; c) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x(e^{2x} + 1)} dx = \int_1^e \frac{1}{t(t^2 + 1)} dt = \ln \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \Big|_1^e = 1 + \ln \sqrt{\frac{2}{e^2 + 1}}$.

Problema 4. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{[x]}^x \frac{\sin t}{t^2 + 1} dt$.

Dan Marinache, Călărași

Soluție: $-\frac{1}{t^2 + 1} \leq \frac{\sin t}{t^2 + 1} \leq \frac{1}{t^2 + 1}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (1); $(\arctg x - \arctg [x]) \leq (\arctg([x] + 1) - \arctg [x])$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (2);

din (1) și (2) $\Rightarrow -(\arctg([x] + 1) - \arctg [x]) \leq \int_{[x]}^x \frac{\sin t}{t^2 + 1} dt \leq (\arctg([x] + 1) - \arctg [x])$;

$\arctg(x - 1) \leq \arctg [x] \leq \arctg x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg [x] = \frac{\pi}{2}$;

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\arctg([x] + 1) - \arctg [x]) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{[x]}^x \frac{\sin t}{t^2 + 1} dt = 0$.