

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a XII-a

1. Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care admit o primitivă $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $F(x) = \{f(x)\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde prin $\{a\}$ înțelegem partea fracționară a numărului real a .
2. (a) Arătați că $\int_{-1}^1 \ln(x^2 + x + 1)dx = \int_{-1}^1 \ln(x^2 - x + 1)dx$.
(b) Calculați $\int_{-1}^1 \ln(x^4 + 3x^2 + 4)dx$.
3. Fie $I_n = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^n \cdot \frac{1}{x} dx$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că
$$2nI_n = 5 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 8(n-1)I_{n-2}, \text{ pentru } n \geq 2.$$
4. (a) Arătați că orice grup cu 9 elemente este abelian.
(b) Există vreun monoid necomutativ cu 9 elemente?

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.