

12

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a XII – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

i) Legea „ $*$ ” admite element neutru dacă și numai dacă $\exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x$,
 $\forall x \in \mathbb{R}$

1p

Se obține $x(ae - 2) = e - 6, \forall x \in \mathbb{R}$

1p

Pentru $x = 0$, se obține $e = 6$

1p

și apoi $a = \frac{1}{3}$

1p

ii) Este necesar $axy - x - y + 6 \in [0, 6], \forall x, y \in \mathbb{R}$.

1p

Pentru $x = y = 6$ se obține $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$

1p

și orice $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$ satisface cerința.

1p

Problema 2: soluție orientativă

i) Este necesar și suficient ca F să fie derivabilă.

1p

Din continuitate rezultă $a + b = 1$.

1p

Din derivabilitate rezultă $a = 0$

1p

și apoi $b = 1$.

1p

ii) $\int_1^e \frac{1}{xF(x)} dx = \int_1^e \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} dx = \int_1^e \frac{(\ln x)'}{\ln^2 x + 1} dx =$

2p

$= \arctg(\ln e) - \arctg(\ln 1) = \frac{\pi}{4}$.

1p

Problema 3: soluție orientativă

Fie $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. Egalitatea din ipoteză se mai poate scrie

$F(1) - F(0) = g(1) - g(0)$ sau $F(1) - g(1) = F(0) - g(0)$.

2p

Fie $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = F(x) - g(x)$. h satisface condițiile teoremei lui Rolle

2p

Există $c \in (0, 1)$ astfel încât $h'(c) = 0$, echivalent cu $f(c) = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}$

2p

Se verifică imediat că $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} < \frac{\sqrt{2}}{1 + c}$, pentru $c \in (0, 1)$.

1p

Problema 4: soluție orientativă

i) Se arată ușor că nu există grupuri prietenoase cu trei elemente ($f(x) = x^2$ este automorfism și nu există $a \in G$, $\text{ord}(a) = 3$ cu $f(a) = a$). **2p**

Orice grup cu patru elemente este sau ciclic (izomorf cu Z_4) sau izomorf cu grupul lui Klein. Dacă G cu patru elemente este ciclic, atunci există două automorfisme ($f(x) = x$, $f(x) = x^3$) și grupul este prietenos. **1p**

Dacă $G_1 = \{e, a, b, c\}$, cu $a^2 = b^2 = c^2 = e$, $f: G \rightarrow G$, $f(e) = e$, $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ este automorfism și nu există $x \in G$, $\text{ord}(x) = 2$, astfel încât $f(x) = x$. Deci, un grup izomorf cu grupul lui Klein nu este prietenos. **1p**

ii) Presupunem, prin metoda reducerii la absurd, că $\text{ord}(G)$ e liber de pătrate. Atunci, există n număr natural nenul și $p_1, p_2, \dots, p_n$ numere prime distincte, astfel încât $\text{ord}(G) = p_1 p_2 \dots p_n$.

Fie $f \in \text{Aut}(G)$, $H = \{x \in G \mid f(x) = x\}$. Se arată ușor că H este subgrup al lui G . **1p**

Există $a_1, a_2, \dots, a_n$ ce aparțin lui G cu $\text{ord}(a_1) = p_1$, $\text{ord}(a_2) = p_2$, ..., $\text{ord}(a_n) = p_n$, astfel încât $f(a_1) = a_1$, $f(a_2) = a_2$, ..., $f(a_n) = a_n$. Rezultă că $p_1 \mid \text{ord}(H)$, $p_2 \mid \text{ord}(H)$, ..., $p_n \mid \text{ord}(H)$.

Cum $p_1, p_2, \dots, p_n$ sunt numere prime distincte, rezultă $p_1 p_2 \dots p_n = \text{ord}(G) \mid \text{ord}(H)$, deci $H = G$ și, în particular, $f = 1_G$. **1p**

Cum singurul automorfism interior al lui G este 1_G , rezultă că G este comutativ. Cum automorfismul $x \rightarrow x^{-1}$ este 1_G , obținem $x^2 = e$, $\forall x \in G$, deci $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 2$, fals. **1p**

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.