

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16 FEBRUARIE 2019
CLASA A XII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Fie $(M, \cdot)$ un monoid finit cu elementul neutru e . Să se arate că dacă $a^2 \neq a$ pentru orice $a \in M \setminus \{e\}$, atunci $(M, \cdot)$ este grup.

Gazeta Matematică

Soluție:

Fie $a \in M$. Cum M este finit, există i și $k \in \mathbb{N}^*$ cu $a^i = a^{i+k}$ 1p

Prin înmulțiri succesive cu $a^k \Rightarrow a^i = a^{i+nk}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ 2p

Alegem $n \in \mathbb{N}^*$ cu $nk > i$. Prin înmulțirea ultimei relații cu a^{nk-i} , obținem $a^{nk} = a^{2nk}$ 2p

Fie $b = a^{nk}$. Atunci $b^2 = b$, deci $b = e \Rightarrow a^{nk} = e$, deci a este inversabil. Atunci $(M, \cdot)$ este grup2p

2. Fie funcțiile $f, g, G: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(3+\ln x)(5+\ln x)}$, $g(x) = \frac{1}{x(a+\ln x)}$, $a > 0$ și

$G(x) = \ln(a + \ln x)$.

a) Arătați că G este o primitivă a lui g pe intervalul $[1, +\infty)$.

b) Determinați o primitivă F a funcției f pe intervalul $[1, +\infty)$ cu proprietatea $F(e^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{7}$.

Mădălina Teodorescu, Brăila

Soluție:

a) Prin calcul se arată că $G'(x) = g(x)$, $\forall x \in [1, +\infty)$ 2p

b) $\int \frac{1}{x(3+\ln x)(5+\ln x)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x(3+\ln x)} - \frac{1}{x(5+\ln x)} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln(3+\ln x) - \ln(5+\ln x)) + C$

$F(e^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{7} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{7} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} (\ln(3+\ln x) - \ln(5+\ln x))$ 5p

3. Pe mulțimea $(0, \infty)$ definim legea de compoziție “ $*$ ”, $*: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietățile:

i) $(x+2)*x=1$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$; ii) $(x \cdot y)*z = x \cdot (y*z)$, oricare ar fi $x, y, z \in (0, \infty)$.

a) Calculați $(n+1) * (2n), n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că legea de compoziție “ $*$ ” nu este asociativă și nu admite element neutru.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$$\text{Fie } x, y \in (0, \infty) \Rightarrow x * y = \left[\frac{x}{y+2} \cdot (y+2) \right] * y = \frac{x}{y+2} \cdot [(y+2) * y] = \frac{x}{y+2} \cdot 1 = \frac{x}{y+2} \Rightarrow$$

$$x * y = \frac{x}{y+2}, \text{ oricare ar fi } x, y \in (0, \infty)$$

$$a) (n+1) * (2n) = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 2p$$

$$b) (1 * 2) * 3 = \frac{1}{4} * 3 = \frac{\frac{1}{4}}{3+2} = \frac{\frac{1}{4}}{5} = \frac{1}{20}; 1 * (2 * 3) = 1 * \frac{2}{5} = \frac{1}{\frac{2}{5}+2} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}; \frac{1}{20} \neq \frac{5}{12} \text{ deci legea } * \text{ nu}$$

este asociativă.....2p

Dacă e este elementul neutru al legii de compoziție atunci $x * e = e * x = x$ oricare ar fi

$$x \in (0, \infty) \frac{x}{e+2} = \frac{e}{x+2} = x \Rightarrow e+2=1 \Rightarrow e=-1 \notin (0, \infty) \Rightarrow * \text{ nu admite element neutru} \dots\dots 3p$$

4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu proprietatea că $f'(x^{2019}+1)=x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $f(0)=0$. Dacă F este o primitivă a funcției f , calculați $F(0)-F(1)$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$$\text{Fie } x^{2019} + 1 = y \Rightarrow x = \sqrt[2019]{y-1} \Rightarrow f'(y) = \sqrt[2019]{y-1}, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(y) = \frac{(y-1)^{\frac{1}{2019}+1}}{\frac{1}{2019}+1} + c =$$

$$= (y-1)^{\frac{2020}{2019}} \cdot \frac{2019}{2020} + c; f(0) = \frac{2019}{2020} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{2019}{2020} \Rightarrow f(x) = \frac{2019}{2020} (x-1)^{\frac{2020}{2019}} - \frac{2019}{2020} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \frac{2019^2}{2020 \cdot 4039} (x-1)^{\frac{4039}{2019}} - \frac{2019}{2020} x + C \dots\dots\dots 4p$$

$$F(0)-F(1) = -\frac{2019^2}{2020 \cdot 4039} + \frac{2019}{2020} = \frac{2019(4039-2019)}{2020 \cdot 4039} = \frac{2019 \cdot 2020}{2020 \cdot 4039} = \frac{2019}{4039} \dots\dots\dots 3p$$