

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

CLASA A XI-a

28 februarie 2015

Barem de corectare

Subiectul 1. Fie A și B două matrice patratiche de ordinul 2 cu elemente reale având proprietatea că $AB - BA = A^2$.

Să se arate că $(B - A)^{2015} = B^{2014}(B - 2015A)$.

GM 9/2014(enunț adaptat)

Soluție: Inductiv se demonstrează că în general $(B - A)^{n+1} = B^n(B - (n + 1)A)$.

$$n=1 \Rightarrow (B - A)^2 = B^2 - BA - AB + A^2 = B^2 - 2BA + BA - AB + A^2 = B(B - A) \dots 2p$$

$$P(k) \Rightarrow P(k + 1)$$

$$(B - A)^{k+2} = (B - A)^{k+1}(B - A) = B^k(B - (k + 1)A)(B - A) = B^k(B^2 - BA - (k + 1)AB + (k + 1)A^2) = B^k(B^2 - (k + 2)BA + (k + 1)BA - (k + 1)AB + (k + 1)A^2) = B^k(B^2 - (k + 2)BA) = B^{k+1}(B - (k + 1)A) \dots 4p$$

Finalizare1p

Subiectul 2. Fie A o matrice de ordinul doi cu elemente reale și A^t matricea transpusă. Știind că $\det(A + A^t) = 8$ și $\det(A + 2A^t) = 27$. Să se calculeze $\det A$.

GM 11/2014

$$\text{Soluție: } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A + A^t) = \begin{vmatrix} 2a & b + c \\ b + c & 2d \end{vmatrix} = 4ad - (b + c)^2 = 4ad - b^2 - 2bc - c^2 = 8 \dots 3p$$

$$\det(A + 2A^t) = \begin{vmatrix} 3a & b + 2c \\ 2b + c & 3d \end{vmatrix} = 9ad - (b + 2c)(2b + c) = 9ad - 2b^2 - 5bc - 2c^2 = 27 \dots 2p$$

Finalizare: $ad - bc = 11 \dots 2p$

Subiectul 3. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + (tgx)^2 + (tg(2x))^2 + \dots + (tg(nx))^2 \right)^{\frac{1}{x^2}} \right)^{\frac{1}{n^3}}$$

$$\begin{aligned} \text{Soluție: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + (tgx)^2 + (tg(2x))^2 + \dots + (tg(nx))^2 \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln \left(1 + (tgx)^2 + (tg(2x))^2 + \dots + (tg(nx))^2 \right)^{\frac{1}{x^2}}} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \frac{\ln \left(1 + (tgx)^2 + (tg(2x))^2 + \dots + (tg(nx))^2 \right)}{(tgx)^2 + (tg(2x))^2 + \dots + (tg(nx))^2} \left((tgx)^2 + (tg(2x))^2 + \dots + (tg(nx))^2 \right)} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \left(\frac{(tgx)^2}{x^2} + \frac{(tg(2x))^2}{4x^2} + \dots + \frac{(tg(nx))^2}{n^2 x^2} \right) \cdot x^2} &= e^{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \dots \dots 5p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + (tgx)^2 + (tg(2x))^2 + \dots + (tg(nx))^2 \right)^{\frac{1}{x^2}} \right)^{\frac{1}{n^3}} &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \right)^{\frac{1}{n^3}} &= e^{\frac{2}{6}} = \sqrt[3]{e} \dots \dots \dots 2p \end{aligned}$$

Subiectul 4. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două șiruri de numere reale definite prin $x_0 > 1$ și $x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} = x_n - 2$, iar $y_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{2^n}$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - 2}{y_n}$.

$$\text{Soluție: } (x_{n+1} - 1)^2 = x_n - 1 \Rightarrow x_{n+1} - 1 = \pm \sqrt{x_n - 1} \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Dacă } x_{n+1} - 1 = -\sqrt{x_n - 1} \Rightarrow x_{n+2} - 1 = -\sqrt{x_{n+1} - 1} = -i^4 \sqrt{x_n - 1} \notin \mathbf{R} \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Dacă } x_{n+1} - 1 = \sqrt{x_n - 1} \Rightarrow x_n - 1 = \sqrt[2^n]{x_0 - 1} \text{ (inductiv)} \dots \dots \dots 2p$$

$$\text{Cum } y_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \text{ avem}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - 2}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2^n]{x_0 - 1} - 1}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_0 - 1)^{\frac{1}{2^n}} - 1}{\frac{1}{2^n}} = \ln(x_0 - 1) \dots \dots \dots 3p$$