Barem de corectare OML Clasa a X- a, 2014

1.

Avem: $\log_a(a^b-1)\cdot\log_a(a^b+1)\le\left[\frac{\log_a(a^b-1)+\log_a(a^b+1)}{2}\right]^2$ 3p

$\frac{\log_a(a^b-1)+\log_a(a^b+1)}{2}=\frac{\log_a(a^{2b}-1)}{2}<\frac{\log_a a^{2b}}{2}=b$ 2p

Finalizare 2p

2.

Avem

$a^3(b-c)=b^3(a-c)-c^3(a-b)=(b-c)(ab^2+abc+ac^2-b^2c-bc^2)$. 2p

Sau $(b-c)\cdot(a-b)\cdot(a^2+ab-bc-c^2)=0$..2p

De unde $(b-c)\cdot(a-b)\cdot(a-c)(a+b+c)=0$ și deci $a+b+c=0$, deci triunghiul este echilateral..3p

3.

a) $z^{2^m}=\cos\pi+i\sin\pi$; $z^{2^n}=\cos\pi+i$ 1p

Determină soluțiile celor două ecuații 2p

Determină soluțiile comune celor două ecuații..1p

b) $z^m=1$, $z^n=1$ sau $z^m=\cos0+i\sin0$, $z^n=\cos0+i\sin0$ 1p

Determină soluțiile celor două ecuații 1p

Determină soluțiile comune celor două ecuații...1p

4. $f(n)=\{2^n\sqrt{2}\}$

Injectivitate: Fie $f(n)=f(m)\Rightarrow\{2^n\sqrt{2}\}=\{2^m\sqrt{2}\}\Leftrightarrow 2^n\sqrt{2}-[2^n\sqrt{2}]=2^m\sqrt{2}-[2^m\sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow(2^n-2^m)\sqrt{2}=[2^n\sqrt{2}]-[2^m\sqrt{2}]\in Z\Rightarrow(2^n-2^m)=0\Rightarrow n=m\Rightarrow$ f injectivă 4p

Surjectivitate: Pt. $y=\frac{1}{2}\in[0,1]$, $\exists\ n\in N$ a.î. $f(n)=\frac{1}{2}\Rightarrow\{2^n\sqrt{2}\}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2^n\sqrt{2}-[2^n\sqrt{2}]=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2^n\sqrt{2}=[2^n\sqrt{2}]+\frac{1}{2}\in Q$ contradicție $\Rightarrow$ f nu este surjectivă 3p