



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14. 02. 2015

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1.

- (2p) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \det(A + xI_3)$ și observăm că $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \det A$.
- (2p) Din ipoteză, $f(1) = f(2) \Rightarrow 3a + b + 7 = 0$
- (1p) Avem $2 \det(A + I_3) + \det(A - I_3) + 6 = 2f(1) + f(-1) + 6$
- (2p) dar, $2f(1) + f(-1) + 6 = 3 \det A + (3a + b + 7) = 3 \det A$.

PROBLEMA 2.

- (2p) Dacă S este aria triunghiului, atunci: $2S = ah_a = bh_b = ch_c \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}, h_b = \frac{2S}{b}, h_c = \frac{2S}{c}$
- (1p) $\det A = 4S^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{ab} \\ 1 & b & \frac{1}{bc} \\ 1 & c & \frac{1}{ca} \end{vmatrix}$
- (2p) $\det A = 4S^2 \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{abc} = 2S^2 \cdot \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{abc} \geq 0$
- (2p) $\det A = 0 \Leftrightarrow a = b = c$

PROBLEMA 3.

- (1p) Avem $\{\sqrt{n^2 + 5n + 9}\} = \sqrt{n^2 + 5n + 9} - [\sqrt{n^2 + 5n + 9}]$
- (3p) Deoarece, $n + 2 < \sqrt{n^2 + 5n + 9} < n + 3, \forall n \geq 1$
- (1p) obținem că $[\sqrt{n^2 + 5n + 9}] = n + 2$
- (2p) și astfel, $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2 + 5n + 9}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n + 9} - (n + 2)) = \frac{1}{2}$

PROBLEMA 4.

(1p) a) Din $x_n - x_{n-1} = 2n + 1$, pentru $n \geq 2$

(3p) obținem că $x_n = x_1 + \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (2k + 1) = n(n + 2)$

(2p) b)
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{2k-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$$

(1p) și astfel, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln 2 + \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{2k-1}} \right) \right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^n \right) = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.