

Olimpiada Națională de Matematică

Faza locală – Dâmbovița

25 februarie 2023

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $A^n + A^{n+2} = 90A$.

Subiectul 2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătați că: $\det(A + I_2) = \det(I_2 - A)$ dacă și numai dacă $\text{Tr } A = 0$.

Subiectul 3. Determinați valorile $a \in (0, \infty)$ pentru care șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = a$ și

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

este convergent.

Subiectul 4. Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} - mx - n \right) = 0.$$

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect este cotate cu 7 puncte.