

12

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a XII – a

SUBIECTE:

1. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = axy - x - y + 6$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, unde a este o constantă reală.

i) Să se arate că legea „ $*$ ” admite element neutru dacă și numai dacă $a = \frac{1}{3}$.

ii) Să se arate că dacă intervalul $[0, 6]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „ $*$ ”, atunci $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

i) Să se determine numerele reale a și b astfel încât F să fie primitivă a unei funcții f .

ii) Să se calculeze $\int_1^e \frac{1}{xF(x)} dx$.

3. Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă care admite o primitivă F , astfel încât

$F(1) - F(0) = \ln(1 + \sqrt{2})$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $\frac{1}{\sqrt{2}} < f(c) < \frac{\sqrt{2}}{1+c}$.

4. Spunem că un grup finit cu cel puțin trei elemente este *prietenos* dacă pentru orice p prim, $p \mid \text{ord } G$ și pentru orice automorfism al lui G , există $a \in G$, $\text{ord } a = p$, astfel încât $f(a) = a$.

i) Să se determine grupurile *prietenose* cu trei și patru elemente.

ii) Să se arate că ordinul unui grup *prietenos* nu e liber de pătrate.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.

Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.