

Soluții și bareme orientative
Clasa a IX-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Dacă $r = a_2 - a_1$, rația progresiei date, atunci:

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k \cdot a_{k+2p-1}} = \frac{1}{r \cdot (2p-1)} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+2p-1}} \right) = \frac{1}{r \cdot (2p-1)} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+2p-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{r \cdot (2p-1)} \cdot \left[\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2p-1}} \right) + \left(\frac{1}{a_{2p}} + \frac{1}{a_{2p+1}} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - \left(\frac{1}{a_{2p}} + \frac{1}{a_{2p+1}} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \dots + \frac{1}{a_{n+2p-1}} \right) \right] = \frac{1}{r \cdot (2p-1)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{2p-1} \frac{1}{a_k} - \sum_{k=1}^{2p-1} \frac{1}{a_{n+k}} \right).$$

(2p)

Dar $\sum_{k=1}^{2p-1} \frac{1}{a_k} \cdot \sum_{k=1}^{2p-1} a_k \geq (2p-1)^2$, (inegalitatea mediilor), deci $\sum_{k=1}^{2p-1} \frac{1}{a_k} \geq \frac{2 \cdot (2p-1)}{a_1 + a_{2p-1}}$, (s-a aplicat formula de calcul al sumei termenilor unei progresii aritmetice).

Dar $a_1 + a_{2p-1} = 2 \cdot a_p$, deci $\sum_{k=1}^{2p-1} \frac{1}{a_k} \geq \frac{2p-1}{a_p}$.

(2p)

Pe de altă parte $\sum_{k=1}^{2p-1} \frac{1}{a_{n+k}} \leq \frac{2p-1}{a_{n+1}}$, deoarece $a_{n+k} \geq a_{n+1}, (\forall) k = \overline{1, 2p-1}$.

(1p)

În final avem:

$$S \geq \frac{1}{r \cdot (2p-1)} \cdot \left(\frac{2p-1}{a_p} - \frac{2p-1}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{a_{n+1} - a_p}{a_p \cdot a_{n+1}} = \frac{n+1-p}{a_p \cdot a_{n+1}}, \text{ deci } S \geq \frac{n+1-p}{a_p \cdot a_{n+1}}, \text{ cu egalitate}$$

dacă și numai dacă $p = 1$:

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{n \cdot r}{r \cdot a_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}.$$

(2p)

2. Folosind: $x = [x] + \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}$, ecuația din enunț: $[x]^2 - 2 \cdot x + 6 \cdot \{x\} = \pi, (*)$, se mai scrie:

$$[x]^2 - 2 \cdot [x] = \pi - 4 \cdot \{x\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \pi - 4 \cdot \{x\} \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}.$$

(2p)

Cazul I.

$$\pi - 4 \cdot \{x\} = -1 \Rightarrow \{x\} = \frac{\pi+1}{4} \notin [0, 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(1p)

Cazul II.

$\pi - 4 \cdot \{x\} = 0 \Rightarrow [x]^2 - 2 \cdot [x] = 0$, ecuația are ambele soluții întregi $\{0, 2\}$. Cum $\{x\} = \frac{\pi}{4}$, soluțiile ecuației (*) pentru acest caz sunt: $x_1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = 2 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi+8}{4}$. (1p)

Cazul III.

$\pi - 4 \cdot \{x\} = 1 \Rightarrow [x]^2 - 2 \cdot [x] = 1 \Leftrightarrow [x]^2 - 2 \cdot [x] - 1 = 0 \Rightarrow [x]_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, deci ecuația în acest caz nu are soluții (întregi). (1p)

Cazul IV.

$\pi - 4 \cdot \{x\} = 2 \Rightarrow [x]^2 - 2 \cdot [x] = 2 \Leftrightarrow [x]^2 - 2 \cdot [x] - 2 = 0 \Rightarrow [x]_{5,6} = 1 \pm \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$, deci ecuația în acest caz nu are soluții (întregi). (1p)

Cazul V.

$\pi - 4 \cdot \{x\} = 3 \Rightarrow [x]^2 - 2 \cdot [x] = 3 \Leftrightarrow [x]^2 - 2 \cdot [x] - 3 = 0$, ecuația are ambele soluții întregi $\{-1, 3\}$. Cum $\{x\} = \frac{\pi-3}{4}$, soluțiile ecuației (*) pentru acest caz sunt: $x_7 = -1 + \frac{\pi-3}{4} = \frac{\pi-7}{4}$, $x_8 = 3 + \frac{\pi-3}{4} = \frac{\pi+9}{4}$.

În concluzie, ecuația are mulțimea soluțiilor: $\left\{\frac{\pi-7}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi+8}{4}, \frac{\pi+9}{4}\right\}$. (1p)

3. Conform teoremei lui Ceva în triunghiul ABC și cevienele AA' , BB' , CC' , avem:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1. \quad (1) \quad (1p)$$

Conform teoremei lui Menelaus în triunghiul $BB'C'$ și transversala $A - D - O$, avem:

$$\frac{DC'}{DB'} \cdot \frac{OB'}{OB} \cdot \frac{AB}{AC'} = 1. \quad (2) \quad (2p)$$

De asemenea, din teorema lui Menelaus în triunghiul $BB'C$ și transversala $A - O - A'$:

$$\frac{OB}{OB'} \cdot \frac{AB'}{AC} \cdot \frac{A'C}{A'B} = 1. \quad (3) \quad (2p)$$

Înmulțind egalitățile (1), (2), (3) și ținând seama de simplificări, obținem:

$$\frac{DC'}{DB'} \cdot \frac{B'C}{C'B} \cdot \frac{AB}{AC} = 1, \text{ de unde } \frac{C'D}{B'D} \cdot \frac{B'C}{C'B} = \frac{AC}{AB} = \text{constant}. \quad (2p)$$

4.a) Folosind relația lui Leibniz ($\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, $\forall M \in (ABC)$), unde G este centrul de greutate al ΔABC se obține:

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{OG}_a &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA} = \\ &= \overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OA} \text{ (s-a folosit relația lui Sylvester).} \end{aligned}$$

Analog:

$$3\overrightarrow{OG_b} = \overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OB}, \quad 3\overrightarrow{OG_c} = \overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OC}. \quad (1p)$$

$$\overrightarrow{G_a G_b} = \overrightarrow{OG_b} - \overrightarrow{OG_a} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OB}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OA}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}. \quad (1p)$$

b) Analog:

$$\overrightarrow{G_b G_c} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{G_c G_a} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}.$$

$$\Delta ABC \sim \Delta G_a G_b G_c, \text{ raportul de asemănare fiind } \frac{3}{2} \Rightarrow \mathcal{A}[ABC] = \frac{9}{4}\mathcal{A}[G_a G_b G_c]. \quad (1p)$$

c) AG_a, BG_b, CG_c sunt concurente într-un punct $P \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AG_a}, \quad \overrightarrow{BP} = \beta \overrightarrow{BG_b}, \quad \overrightarrow{CP} = \gamma \overrightarrow{CG_c} \quad (1p)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AG_a} &\Rightarrow \overrightarrow{OP} = (\alpha - 1)\overrightarrow{AO} + \alpha \overrightarrow{OG_a} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{3}(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \\ &= \frac{3 - 4\alpha}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{\alpha}{3}\overrightarrow{OC}. \end{aligned} \quad (1p)$$

Deci:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3 - 4\alpha}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{\alpha}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{\alpha}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{\beta}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{3 - 4\beta}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{\beta}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{\gamma}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{\gamma}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{3 - 4\gamma}{3}\overrightarrow{OC} (*).$$

Cum vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ sunt necoliniari și folosind relația (*) obținem: $\alpha = \beta = \gamma = \frac{3}{5}$

$$\text{și } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{OH}. \quad (1p)$$

$$\text{d) Din } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OH} \text{ deducem că } O, P, H \text{ (1) sunt coliniare și cum } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG},$$

rezultă că O, G, H (2) sunt coliniare. Din (1), (2) deducem că O, G, H, P sunt coliniare. **(1p)**