



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală
18februarie 2017

Clasa a XI-a

1. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația: $\Delta_n(z) = 0$, unde determinantul $\Delta_n(z)$ este de forma:

$$\Delta_n(z) = \begin{vmatrix} z & z^2 & z^3 & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & 1+z^n \\ z & z^2 & z^3 & \dots & z^{n-2} & 1+z^{n-1} & z^n \\ z & z^2 & z^3 & \dots & 1+z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z^2 & 1+z^3 & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \\ z & 1+z^2 & z^3 & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \\ 1+z & z^2 & z^3 & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}$$

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ și $b \in \mathbb{R}^*$. Să se determine numărul matricelor $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că:

$$X^{2n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

3. Fie șirul $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$. Să se calculeze:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} \right)^n$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1) \cdot e_{n+1} - n \cdot e_n]$.

4. Arătați că există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât:

$$f(f(x) + x) = a - f(x), (\forall) x \in \mathbb{R} \text{ și } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \text{ dacă și numai dacă } a = 0.$$

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.