



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapă locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a IX-a

Subiectul 1 (7 puncte)

1. Să se determine minimul expresiei: $E(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2024|$, precum și valorile reale ale lui x pentru care se realizează acest minim.
2. Să se determine minimul expresiei: $F(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2024| + |x - 2025|$, precum și valorile reale ale lui x pentru care se realizează acest minim.

Soluție și barem

1. $|x - 1| + |x - 2024| = |x - 1| + |2024 - x| \geq |x - 1 + 2024 - x| = 2023$, cu egalitate când $x \in [1, 2024]$2 puncte
Analog $|x - 2| + |x - 2023| \geq 2021$ cu egalitate când $x \in [2, 2023]$,
 $|x - 3| + |x - 2022| \geq 2019$ cu egalitate când $x \in [3, 2022]$,...,
 $|x - 1012| + |x - 1013| \geq 1$ cu egalitate când $x \in [1012, 1013]$...1 punct
Minimul expresiei $E(x)$ se realizează atunci când în inegalitățile precedente avem egalitate, adică atunci când $x \in [1, 2024] \cap [2, 2023] \cap \dots \cap [1012, 1013] = [1012, 1013]$1 punct
Acest minim este $1 + 3 + 5 + \dots + 2023 = 1012^2$1 punct
2. Procedând ca la punctul anterior $|x - 1| + |x - 2025| \geq 2024$, $|x - 2| + |x - 2024| \geq 2022$, ..., $|x - 1012| + |x - 1014| \geq 2$, minimul expresiei $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 1012| + |x - 1014| + |x - 1015| + \dots + |x - 2024| + |x - 2025|$ este $2 + 4 + 6 + \dots + 2024 = 1012 \cdot 1013$ și se realizează când $x \in [1012, 1014]$1 punct
Minimul expresiei $|x - 1013|$ este 0 și se realizează când $x = 1013 \in [1012, 1014]$, deci minimul expresiei $F(x)$ este $0 + 1012 \cdot 1013 = 1012 \cdot 1013$
Și se realizează când $x = 1013$1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR
DEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a IX-a

Subiectul 2 (7 puncte)

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\left[\frac{3x+1}{2} \right] + \left[\frac{9x+5}{6} \right] + \left[\frac{9x+7}{6} \right] = \frac{7x+5}{2},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

Soluție și barem

$$\left[\frac{3x+1}{2} \right] + \left[\frac{3(3x+1)}{6} + \frac{2}{6} \right] + \left[\frac{3(3x+1)}{6} + \frac{4}{6} \right] = \frac{7x+5}{2} \Leftrightarrow \left[\frac{3x+1}{2} \right] + \left[\frac{3x+1}{2} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{3x+1}{2} + \frac{2}{3} \right] = \frac{7x+5}{2} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\left[\frac{3x+1}{2} \right] + \left[\frac{3x+1}{2} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{3x+1}{2} + \frac{2}{3} \right] = \frac{7x+5}{2} \Leftrightarrow \left[3 \cdot \frac{3x+1}{2} \right] = \frac{7x+5}{2} \Leftrightarrow \left[\frac{9x+3}{2} \right] = \frac{7x+5}{2} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{7x+5}{2} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{2k-5}{7} \Rightarrow \left[\frac{9k-12}{7} \right] = k \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$k \leq \frac{9k-12}{7} < k+1 \Rightarrow k \in \{6;7;8;9\} \Rightarrow x \in \left\{ 1; \frac{9}{7}; \frac{11}{7}; \frac{13}{7} \right\} \quad \dots\dots\dots 2p$$



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a IX-a

Subiectul 3 (7 puncte)

Demonstrați că pentru orice $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2$$

Soluție și barem

Avem $\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} = \frac{a^4}{a^2+2ab} + \frac{b^4}{b^2+2bc} + \frac{c^4}{c^2+2ca} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

$\frac{a^4}{a^2+2ab} + \frac{b^4}{b^2+2bc} + \frac{c^4}{c^2+2ca} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$ (Inegalitatea
Cauchy-Buniakovski, Bergstrom, Andreescu)..... 2 puncte

$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} \geq \frac{\left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2\right)^2}{(a+b+c)^2} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

$\frac{\left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2\right)^2}{(a+b+c)^2} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$



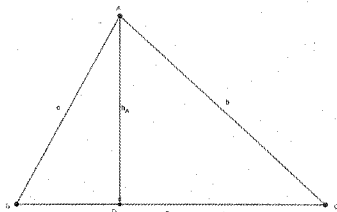
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a IX-a

Subiectul 4 (7 puncte)

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ și $\vec{h}_A, \vec{h}_B, \vec{h}_C$, vectorii corespunzători înălțimilor din A, B respectiv C . Să se arate că:

$$a^2 \cdot \vec{h}_A + b^2 \cdot \vec{h}_B + c^2 \cdot \vec{h}_C = \vec{0}.$$

Soluție și barem



Avem $BD = c \cdot \cos B$, $CD = b \cdot \cos C$, $a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$ 2 punct

$$\vec{h}_A = \frac{(b \cdot \cos C) \cdot \vec{AB} + (c \cdot \cos B) \cdot \vec{AC}}{a} \dots\dots\dots 2 \text{ punct}$$

$$a^2 \cdot \vec{h}_A = (ab \cdot \cos C) \cdot \vec{AB} + (ac \cdot \cos B) \cdot \vec{AC} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Și analoagele:

$$b^2 \cdot \vec{h}_B = (bc \cdot \cos A) \cdot \vec{BC} + (ba \cdot \cos C) \cdot \vec{BA},$$

$$c^2 \cdot \vec{h}_C = (ca \cdot \cos B) \cdot \vec{CA} + (cb \cdot \cos A) \cdot \vec{CB}, \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Rezultă } a^2 \cdot \vec{h}_A + b^2 \cdot \vec{h}_B + c^2 \cdot \vec{h}_C = (ab \cdot \cos C) \cdot (\vec{AB} + \vec{BA}) + (ac \cdot \cos B) \cdot (\vec{AC} + \vec{CA}) + (bc \cdot \cos A) \cdot (\vec{BC} + \vec{CB}) = \vec{0} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$