



Olimpiada Națională de Matematică 2017

Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA A V-A

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

Subiectul I

Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, scrise în baza 10, știind că se împart exact la 11 și este îndeplinită condiția $a \cdot \overline{bb} = \overline{7a} + \overline{a7} + \overline{aa}$.

REZOLVARE

Obține: $11 \cdot a \cdot b = 77 + 22 \cdot a$ 2 p
 Găsește perechile $(a, b) \in \{(1, 9); (7, 3)\}$ 2 p
 Finalizare: $\overline{abc} \in \{198, 737\}$ 3 p

Subiectul II

Se consideră numerele natural $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 2017$, $b = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2017^2$ și $c = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 2017 \cdot 2018$.

- a) Demonstrați că numărul a se divide cu 2017.
 b) Calculați $a + b - c$.

REZOLVARE

- a) Calculează $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 2017 = (1 + 2017) \cdot 2017 : 2$ 2 p
 Finalizare: $a = 1009 \cdot 2017 : 2017$ 1 p
 b) Grupând termenii sumei $a + b$ obține
 $a + b = (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + \dots + (2017^2 + 2017) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2017 \cdot 2018$ 3 p
 Finalizare $a + b - c = 0$ 1 p

Subiectul III.

În magazia echipei C.S.M.S. Iași se găsesc 456 de articole sportive (pantofi sport, șorturi și tricouri). La un inventar s-a constatat că la fiecare două perechi de pantofi sport corespund câte trei șorturi și la fiecare două șorturi corespund câte trei tricouri. Câte articole sportive de fiecare fel s-au găsit la inventar?

REZOLVARE



Notăm cu x - numărul perechilor de pantofi sport din magazie, cu y - numărul șorturilor din magazine și cu z - numărul tricourilor din magazie.

Atunci $x + y + z = 456$ 1 p

Scrie relațiile $x : 2 = y : 3$ și $y : 2 = z : 3$ 2 p

Alege $y = 6t$ și atunci $x = 4t$, iar $z = 9t$ (sau $3x = 2y$, $3y = 2z$) 2 p

Finalizare $x = 96$, $y = 144$ și $z = 216$ 2 p

Subiectul IV.

Împărțind câteva numere naturale consecutive la 10 obținem resturi a căror sumă este tot 10. Aflați numerele inițiale știind că suma câturilor rezultate din împărțirile anterioare este un număr natural mai mare decât 96 și mai mic decât 100.

REZOLVARE

Scrie explicit sau folosește că resturile împărțirilor la 10 a unor numere consecutive sunt termeni consecutivi din șirul 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,1,2,3..... 1 p

Căturile împărțirilor prin 10 a unor numere consecutive sunt numere egale sau consecutive, după cum un număr se împarte exact, sau nu, la 10 (scris explicit sau folosit corect în rezolvare)..... 1 p

Suma resturilor poate fi 10 în situațiile: $S_1 : 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $S_2 : 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$,

sau $S_3 : 9 + 0 + 1 = 10$ 1 p

În situația S_1 , câturile vor fi toate egale cu c , iar relația $96 < 4c < 100$ conduce la o contradicție, deci aceasta situație nu este posibilă..... 1 p

În situația S_2 , câturile vor fi toate egale cu c , iar relația $96 < 5c < 100$ conduce la o contradicție, deci această situație nu este posibilă..... 1 p

În situația S_3 , câturile vor fi, în ordine: c , $c+1$ și $c+1$, iar relația $96 < 3c + 2 < 100$ conduce la $c=32$.. 1 p

În concluzie: numerele căutate sunt 329, 330 și 331..... 1 p

NOTĂ : Orice rezolvare corectă, diferită de barem, va primi punctajul corespunzător.



Olimpiada Națională de Matematică 2017

Etapă locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA a VI-a

Barem de corectare

Problema 1.

a) Arătați că rezultatul calculului $\frac{1,4+2,4+3,4+\dots+\overline{n,4}}{n} + \frac{1}{10} - \frac{n}{2}$ este număr natural, pentru orice

$n \in \mathbb{N}^*$.

b) Într-o urnă se introduc mai multe cartonașe identice pe care sunt imprimate câte două, trei sau patru puncte, numărul total de puncte de pe cartonașe fiind de 39. Cartonașele cu două și respectiv trei puncte totalizează 31 de puncte, iar cele cu trei și patru puncte totalizează 23 de puncte.

Care este probabilitatea ca, la extragerea din urnă a unui cartonaș, acesta să aibă imprimat pe el trei puncte? Dar să nu aibă imprimat pe el trei puncte?

Soluție și barem:

a) $\frac{1,4+2,4+3,4+\dots+\overline{n,4}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \left(1+2+3+\dots+n+n \cdot \frac{4}{10} \right) = \frac{5n+9}{10}$ 2 puncte

$\frac{1,4+2,4+3,4+\dots+\overline{n,4}}{n} + \frac{1}{10} - \frac{n}{2} = \frac{5n+9}{10} + \frac{1}{10} - \frac{n}{2} = 1$ 1 punct

b) Notăm cu d, t, p numărul cartonașelor cu două, trei, respectiv patru puncte. Avem relațiile:

$2d + 3t + 4p = 39$ (1); $2d + 3t = 31$ (2); $3t + 4p = 23$ (3). 1 punct

Înlocuind, succesiv, relațiile (2), (3) în relația (1), obținem:

$4p = 8 \Rightarrow p = 2$; $2d = 16 \Rightarrow d = 8$; în final, $t = 5$. În total sunt $d + t + p = 15$ cartonașe. 1 punct

Astfel, probabilitățile cerute sunt: $P_1 = \frac{t}{d+t+p} = \frac{1}{3}$, 1 punct

respectiv $P_2 = \frac{d+p}{d+t+p} = \frac{2}{3}$ (sau $P_2 = 1 - P_1 = \frac{2}{3}$). 1 punct

Problema 2.

Fie $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ABD$ două unghiuri complementare neadiacente și $[BE$ o semidreaptă cu proprietatea că unghiurile ABE și EBD sunt adiacente având măsurile (exprimate în grade și minute) de $x^\circ y'$, respectiv $y^\circ x'$, unde x și y sunt numere naturale nenule, a căror sumă este 60.

Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor ABC și ABD .



Soluție și barem:

Unghiurile $\angle ABE$ și $\angle EBD$ sunt adiacente $\Rightarrow [BE$ este interioară $\angle ABD$; astfel:

$$m(\angle ABD) = m(\angle ABE) + m(\angle EBD) = x^0 y' + y^0 x' = 61^0 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$m(\angle ABC) = 90^0 - m(\angle ABD) = 90^0 - 61^0 = 29^0 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Cum $m(\angle ABC) < m(\angle ABD) \Rightarrow [BC$ este interioară $\angle ABD \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Considerăm $[BM$ și $[BN$ bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$, respectiv $\angle ABD$. Atunci:

$$m(\angle MBN) = \frac{1}{2} \cdot m(\angle ABC) - \frac{1}{2} \cdot m(\angle ABD) = \frac{1}{2} \cdot (61^0 - 29^0) = 16^0 \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$

Problema 3.

Fie $x, y, z, n \in \mathbb{N}$ astfel încât: $3x + 4y = 36n + 84$ și $5y = 45n + 7z + 5$.

Să se determine x și z .

Soluție și barem:

Putem scrie: $3x + 4y = 36n + 84 \quad / \cdot 5$

$$5y = 45n + 7z + 5 \quad / \cdot 4$$

Prin scăderea celor două relații, obținem

$$15x + 28z = 400 \Rightarrow 15x = 400 - 28z \quad (1) \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Din relația (1) rezultă } 400 - 28z \geq 0 \Rightarrow z \leq \frac{400}{28}, \text{ de unde } z \leq 14 \quad (2) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Tot din (1) rezultă } z : 5 \Rightarrow z \in \{0, 5, 10\} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Pentru $z = 0$, avem $15x = 400$ (nu are soluție naturală).

Pentru $z = 5$, avem $3x = 52$ (nu are soluție naturală).

Pentru $z = 10$, rezultă $15x = 120$, adică $x = 8$.

$$\text{Astfel } x = 8, z = 10. \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$



Problema 4.

Triunghiul ABC are $AB = AC = 6 \text{ cm}$ și $BC = 10 \text{ cm}$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ intersectează AC în E , iar perpendiculara din C pe BE intersectează AB în P . Demonstrați că:

- a) $PE = EC$; b) Perimetrul triunghiului AEP este egal cu lungimea segmentului $[BC]$

Soluție și barem:

a) Realizarea corectă a desenului 1 punct

Considerăm $BE \cap PC = \{F\}$. Atunci: $\triangle BPF \equiv \triangle BCF$ (U.L.U) $\Rightarrow BP = BC$ 2 puncte

$\triangle BPE \equiv \triangle BCE$ (L.U.L) $\Rightarrow PE = EC$ 1 punct

b) $AE + EP = AE + EC = AC = AB$ 2 puncte

$P_{\triangle PAE} = PA + (AE + EP) = PA + AB = PB = BC$ 1 punct



Olimpiada Națională de Matematică 2017
Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA A VII-A

Bareme

Problema 1.

b) Demonstrați egalitatea :

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 4;$$

c) Fie $S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2017^2}$. Să se arate că : $0 < \frac{2016}{2017} - S < \frac{1}{2}$.

Veronica Plăeșu

Barem

a)
$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = \frac{4}{1} = 4 \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

b) Se consideră inegalitatea $n^2 + n > n^2 > n^2 - n, n \in N^* - \{1\}$.

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, n \in N \Rightarrow \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} < \frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2} < \frac{1}{2 \cdot 1} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} < \frac{1}{3 \cdot 4} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{3 \cdot 2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.....



$$\frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} < \frac{1}{2017 \cdot 2018} < \frac{1}{2017^2} < \frac{1}{2017 \cdot 2016} < \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2018} < S < 1 - \frac{1}{2017} \dots\dots\dots 1p$$

$$S < 1 - \frac{1}{2017} \Leftrightarrow 1 - S > \frac{1}{2017} (*)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2018} < S + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2018} < \frac{1}{2} + S \Leftrightarrow 1 - S < \frac{1}{2} + \frac{1}{2018} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2017} \Leftrightarrow 1 - S < \frac{1}{2} + \frac{1}{2017} (**). \dots\dots\dots 1p$$

Din (*) și (**) se obține:

$$\frac{1}{2017} < 1 - S < \frac{1}{2} + \frac{1}{2017} \Leftrightarrow \frac{1}{2017} < \frac{1}{2017} + \frac{2016}{2017} - S < \frac{1}{2} + \frac{1}{2017} / - \frac{1}{2017} \Leftrightarrow 0 < \frac{2016}{2017} - S < \frac{1}{2}.$$

.....1p

Problema 2.

Se consideră mulțimile X și Y cu $X \subset Y$, $\{X, Y\} \subset \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ și propoziția p : „Oricare ar fi $x \in X$ și oricare ar fi $y \in Y \setminus X$, atunci $x + y \in Y \setminus X$ ”, unde „+” reprezintă operația de adunare a numerelor reale. Aflați mulțimile X și Y astfel încât propoziția p să fie adevărată. Justificați!

Claudiu-Ștefan Popa

Barem

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Dacă $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{R}$ atunci p : $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Presupunem, prin reducere la absurd, că $x + y = z \in \mathbb{Q} \Rightarrow y = z - x \in \mathbb{Q}$ în contradicție cu $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Rămâne adevărat că $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, deci p este adevărată.1p

Dacă $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{R}$, atunci p : $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Presupunem, prin reducere la absurd, că $x + y = u \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = u - x \in \mathbb{Z}$, în contradicție cu $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Rămâne adevărat că $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, deci p este adevărată.1p

Dacă $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{R}$, atunci p : $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Pentru $x=5$ și $y=-4$ avem $x + y = 1 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, deci p este falsă.1p

Dacă $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Q}$, atunci p : $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Presupunem, prin reducere la absurd, că $x + y = v \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = v - x \in \mathbb{Z}$, în contradicție cu $y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Rămâne adevărat că $x + y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, deci p este adevărată.1p

Dacă $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Q}$, atunci p : $x \in \mathbb{N}$ și $y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$

Pentru $x=2$ și $y=-1$, avem $x + y = 1 \notin \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, deci p este falsă.1p

Dacă $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Z}$, atunci p : $x \in \mathbb{N}$ și $y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Pentru $x=2$ și $y=-1$, avem $x + y = 1 \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, deci p este falsă1p



Prin urmare $\{X, Y\} \in \{\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}, \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}\{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}\}$ 1p

Problema 3.

În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Aria triunghiului BOC este egală cu a^2 și aria triunghiului COD este egală cu b^2 .

- c) Arătați că $A_{\triangle ADB} = A_{\triangle ACB}$,
d) Calculați aria trapezului $ABCD$.

GM nr. 7/2007

Barem

a) Fie $CE \perp AB$ și $DF \perp AB$, $E, F \in AB$ și $CD \parallel AB \Rightarrow CE = DF$ 1p

$$A_{\triangle ADB} = A_{\triangle ACB} \text{ 1p}$$

b) $A_{\triangle ADB} = A_{\triangle ACB} \Rightarrow A_{\triangle AOD} + A_{\triangle AOB} = A_{\triangle AOB} + A_{\triangle COB} \Rightarrow A_{\triangle AOD} = A_{\triangle COB} = a^2$ 1p

Fie $CM \perp BD$, M punct pe BD .

$$\frac{A_{\triangle COD}}{A_{\triangle BOC}} = \frac{\frac{DO \cdot CM}{2}}{\frac{BO \cdot CM}{2}} = \frac{DO}{BO} = \frac{b^2}{a^2} \text{ 1p}$$

$$\triangle DOC \sim \triangle BOA \Rightarrow \frac{A_{\triangle DOC}}{A_{\triangle BOA}} = \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{A_{\triangle BOA}} = \frac{b^4}{a^4} \Rightarrow A_{\triangle BOA} = \frac{a^4}{b^2} \text{ 2p}$$

$$\text{Finalizare } A_{ABCD} = 2a^2 + b^2 + \frac{a^4}{b^2} \text{ 1p}$$

$$\text{Observație: } 2a^2 + b^2 + \frac{a^4}{b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{b^2}.$$

Problema 4.

Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB \leq BC$. Punctele E și F sunt situate în interiorul, respectiv exteriorul dreptunghiului $ABCD$, de o parte și de cealaltă a dreptei BC , astfel încât $EA = EB = AD$, iar triunghiurile EAB și FCB sunt asemenea. Dacă D , E și F sunt puncte coliniare demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

Claudiu-Ștefan Popa



Barem

Dacă D, E și F sunt coliniare, atunci $m(\angle AED) + m(\angle AEB) + m(\angle BEF) = 180^\circ$ (1).....1p

Notăm $m(\angle DAE) = u$ și $m(\angle BEF) = v$, deci $m(\angle DEA) = 90^\circ - \frac{u}{2}$, $m(\angle AEB) = 2u$ și atunci (1) devine $90^\circ - \frac{u}{2} + 2u + v = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{3u}{2} + v = 90^\circ$ (2)1p

Deoarece $\triangle EAB \sim \triangle FCB \Rightarrow \triangle FCB$ isoscel și $\angle FBC \equiv \angle EBA \Rightarrow m(\angle EBF) = m(\angle FBC) + m(\angle EBC) = m(\angle EBA) + u = 90^\circ$.

Atunci $m(\angle BEF) + m(\angle BFE) = 90^\circ \Leftrightarrow v + m(\angle BFE) = 90^\circ$ (3).1p

Din (2) și (3) avem că $m(\angle BFE) = \frac{3u}{2}$ și cum $m(\angle BFC) = 2u \Rightarrow m(\angle CFD) = 2u - \frac{3u}{2} = \frac{u}{2}$1p

Însă, $m(\angle CDF) = 90^\circ - m(\angle ADE) = 90^\circ - m(\angle AED) = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{u}{2}\right) = \frac{u}{2}$.

Prin urmare, $m(\angle CDF) = m(\angle CFD) \Rightarrow CD = CF$1p

Din faptul că triunghiurile EAB și FCB sunt asemenea rezultă $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BF} = \frac{BE}{CF}$ 1p

Dar $BE=BC$ și $CF=CD$, de unde $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow AB = BC$, adică $ABCD$ este pătrat.1p

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică 2017

Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA a VIII-a

Barem de corectare

1. a) $E(x) = \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 2x + 3} \quad (4p); \quad a=2, b=-12 \quad (1p).$
b) $E(x) = 2 - \frac{12}{(x-1)^2 + 2} \geq -4, \forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}, \quad E(1) = -4 \Rightarrow \min E(x) = -4 \quad (2p).$
2. a) $x+1 = \frac{2\sqrt{a+2b}}{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}, \quad x-1 = \frac{2\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \sqrt{\frac{a+2b}{a-2b}} \quad (4p).$
b) $\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{\frac{a+2b}{a-2b}} \Rightarrow (x+1)^2(a-2b) = (x-1)^2(a+2b) \Rightarrow$
 $ax^2 + 2ax + a - 2bx^2 - 4bx - 2b = ax^2 - 2ax + a + 2bx^2 - 4bx + 2b \Rightarrow$
 $4bx^2 - 4ax + 4b = 0 \Rightarrow bx^2 - ax + b = 0 \quad (2p).$
c) Pentru orice pereche de numere naturale $(a, b) = (k^2 + 1, k)$, unde $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, avem $x = k \in \mathbb{N}$
și $a > 2b > 0$. Există o infinitate de astfel de perechi $(1p).$
3. a) $A_{A'BC} = 18 \text{ cm}^2 \quad (3p).$
b) Fie $NP \perp A'M, P \in A'M$. Distanța de la punctul N la planul $(A'BC)$ este $NP = \frac{A'N \cdot NM}{A'M} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \quad (2p).$
c) Deoarece $(MNA') \cap (MA'C') = A'M, NP \perp A'M$ și $C'P \perp A'M$, rezultă că unghiul determinat de planele (MNA') și $(MA'C')$ este unghiul NPC' . Avem $\text{tg}(\angle NPC') = \frac{NC'}{NP} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (2p).$
4. a) Deoarece $MN \parallel BD$ și $BD \parallel B'D'$, rezultă că $MN \parallel B'D'$, deci punctele M, N, D' și B' sunt coplanare $(3p).$
b) $A_{MND'B'} = 18 \text{ cm}^2 \quad (2p).$
c) Dacă $\{R\} = BC' \cap B'M$ și $\{S\} = D'N \cap DC'$, atunci $(C'BD) \cap (MND') = RS$. Deoarece $B'C' \parallel BM$, rezultă că triunghiurile BMR și $C'B'R$ sunt asemenea, deci $\frac{C'R}{RB} = \frac{B'C'}{BM} = 2$. Analog, deducem că $\frac{C'S}{SD} = 2$. Așadar, $SR \parallel BD$. Fie $\{G\} = C'O \cap SR$ (unde O este centrul pătratului $ABCD$). Întrucât $SR \parallel BD$, avem $\frac{C'G}{GO} = \frac{C'R}{RB} = 2$.
Cum $C'O$ este mediană în triunghiul $C'BD$, rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului $C'BD$. Prin urmare, centrul de greutate al triunghiului $C'BD$ aparține dreptei SR , deci planului (MND') $(2p).$