

Barem – Clasa a VI-a

Subiectul I

- a) Rezolvați ecuația: $\left[\frac{1, (3) \cdot x}{2} - 2 \frac{1}{4} \right] : 0,6 = \frac{x}{9}$.
- b) Găsiți cifra $x \neq 0$ pentru care: $\frac{\overline{3x}}{x6} = \frac{5}{8}$.
- c) Determinați cifra $x \neq 0$ știind că $(\overline{x3x}; 15) = 1$.

Rezolvare:

- a) $x = \frac{15}{4}$ (3p)
- b) $x = 5$ (2p)
- c) $x \in \{1, 2, 4, 7, 8\}$ (2p)

Subiectul II

Numim *completatul* unui număr natural nenul n **cel mai mic număr natural nenul care înmulțit cu n dă un pătrat perfect**. Îl vom nota cu $C(n)$.

- a) Găsiți $C(54)$, $C(100)$ și $C(2^3 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 11^4)$.
- b) Demonstrați că $C(n)$ este produsul tuturor divizorilor primi de exponenți impari ai lui n .
- c) Câte numere naturale nenule $n \leq 100$ există, cu proprietatea că $C(n) = n$?

Rezolvare:

- a) Descompunând în factori primi numerele date obținem: $54 = 2 \cdot 3^3$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Pentru ca din 54 să obținem un pătrat perfect nenul cât mai mic, trebuie înmulțit cu $2 \cdot 3 = 6 = C(54)$. Întrucât 100 este pătrat perfect deducem că $C(100) = 1$, iar $C(2^3 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 11^4) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ (3p)
- b) Din *Teorema Fundamentală a Aritmeticii* orice număr natural n se poate scrie ca produs de numere prime. Fie $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Se arată că: $C(n) = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$, unde $\beta_l = \begin{cases} 0, & \text{când } \alpha_l \text{ este par, pentru} \\ 1, & \text{când } \alpha_l \text{ este impar} \end{cases}$
- fiecare $l \in \{1; 2; \dots; k\}$. Într-adevăr, dacă α_i este impar, atunci $p_i | C(n)$. Deci $C(n) \geq p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$. Se

vede clar că în produsul $n \cdot p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k + \beta_k}$ toți exponenții sunt pari, deci este pătrat perfect. Aceasta înseamnă că $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$ este cel mai mic număr natural care înmulțit cu n dă pătrat perfect. Deci $C(n) = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$

.....(2p)

c) Se vede ușor că $C(n) = n$, doar dacă n se scrie ca produs de numere prime distincte, cu toți exponenții egali cu 1.....(1p)

Să vedem câte astfel de numere naturale nenule există până la 100. Le vom împărți în câteva categorii:

■ Numere prime: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. (25 de numere)

■ Produs de două numere prime (nu numărăm de două ori același produs; exemplu: $2 \cdot 3$ și $3 \cdot 2$):

• cu 2:

$2 \cdot 3; 2 \cdot 5; 2 \cdot 7; 2 \cdot 11; 2 \cdot 13; 2 \cdot 17; 2 \cdot 19; 2 \cdot 23; 2 \cdot 29; 2 \cdot 31; 2 \cdot 37; 2 \cdot 41; 2 \cdot 43; 2 \cdot 47$. (14 numere)

• cu 3: $3 \cdot 5; 3 \cdot 7; 3 \cdot 11; 3 \cdot 13; 3 \cdot 17; 3 \cdot 19; 3 \cdot 23; 3 \cdot 29; 3 \cdot 31$. (9 numere)

• cu 5: $5 \cdot 7; 5 \cdot 11; 5 \cdot 13; 5 \cdot 17; 5 \cdot 19$. (5 numere)

• cu 7: $7 \cdot 11; 7 \cdot 13$. (2 numere)

Următoarele produse sunt mai mari sau egale cu $11 \cdot 13 = 143 > 100$.

■ Produs de trei numere prime: $2 \cdot 3 \cdot 5; 2 \cdot 3 \cdot 7; 2 \cdot 3 \cdot 11; 2 \cdot 3 \cdot 13; 2 \cdot 5 \cdot 7$. (5 numere)

■ Produs de măcar 4 numere prime: cel mai mic ar fi $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 100$. Deci nu mai există și alte numere.

În concluzie avem: $25 + 14 + 9 + 5 + 2 + 5 = 60$ de numere până la 100 egale cu completatele lor.....(1p)

Subiectul III

Unui ceas i se sfârșește puterea bateriei astfel: la început când bateria încă **funcționează corect**, într-un timp de T secunde, minutarul pornește de la ora 12 fix și parcurge un unghi de 64° ; apoi bateria ceasului slăbește și în același timp T minutarul parcurge un unghi de 32° ; după aceea bateria slăbește și mai mult și tot în același timp T minutarul parcurge un unghi cu măsura de 16° ; apoi tot în T secunde parcurge 8° și tot așa mai departe, mereu înjumătățindu-se măsura unghiului parcurs de minutar în T secunde.

a) Aflați timpul $T = ?$ secunde = ? minute.

b) Ce oră va indica ceasul după $n \cdot T$ secunde, unde $n \in \mathbb{N}^*$?

c) Demonstrați că ceasul nu va trece niciodată de ora 12; 21 de minute și 20 de secunde (ora 12:21:20).

Rezolvare:

a) Într-o oră minutarul parcurge un cerc complet. Deci în 60' parcurge 360° . Astfel într-un minut parcurge minutarul $360 : 60 = 6^\circ$. Deci un unghi de 64° va fi parcurs în $T = 64 : 6 = 10, \overline{6}$ minute = $(64 : 6) \cdot 60 = 640$ secunde.....(3p)

b) După T secunde: $64^\circ = 64^\circ \cdot 1$; după $2T$ secunde: $64^\circ + 32^\circ = 64^\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$; după $3T$ secunde:
 $64^\circ + 32^\circ + 16^\circ = 64^\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)$; după $4T$ secunde: $64^\circ + 32^\circ + 16^\circ + 8^\circ = 64^\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right)$; ..., în general,
 după nT secunde minutarul va fi parcurs: $64^\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$
(2p)

c) Observăm că, indiferent de valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$, avem că

$$64^\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 64^\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 64^\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \dots =$$

. Deci niciodată minutarul nu va ajunge să parcurgă un unghi de 128° (care corespunde unei durate de $2T$ secunde
 $= 2 \cdot 640 = 1280'' = (21 \cdot 60 + 20) = 21'20''$, când ceasul funcționează corect). Știind că minutarul pornește de la ora
 12 fix, deducem că ceasul nu va ajunge niciodată să indice ora: 12:21:20.....(2p)

Subiectul IV

Se notează cu $[OC]$ bisectoarea unghiului $\angle AOB$. Dacă $[OD]$ este bisectoarea $\angle AOC$, $[OE]$ este bisectoarea
 unghiului $\angle BOD$, $[OF]$ este bisectoarea unghiului $\angle AOE$, iar $m(\angle DOF) = 5^\circ$, găsiți măsura unghiului $\angle AOB$.

Gazeta Matematică

Rezolvare:

Notăm $m(\angle AOB) = x$. Atunci: $m(\angle BOC) = m(\angle AOC) = \frac{x}{2}$
(1p)

Totodată, $m(\angle AOD) = m(\angle COD) = \frac{x}{4}$. Avem că $m(\angle BOD) = m(\angle AOB) - m(\angle AOD) = x - \frac{x}{4} = \frac{3x}{4}$(2p)

Deci: $m(\angle BOE) = m(\angle DOE) = \frac{3x}{8}$. Atunci: $m(\angle AOE) = m(\angle AOB) - m(\angle BOE) = x - \frac{3x}{8} = \frac{5x}{8}$
 (2p)

Așadar: $m(\angle AOF) = m(\angle EOF) = \frac{5x}{16}$.
(1p)

În concluzie, $m(\angle DOF) = m(\angle AOF) - m(\angle AOD) = \frac{5x}{16} - \frac{x}{4} = \frac{x}{16} = 5^\circ \Rightarrow x = 16 \cdot 5^\circ = 80^\circ$(1p)

