



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL I

a) Arătați că $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$, oricare ar fi k număr natural nenul.

b) Fie $p = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100}$. Aflați zecimea din scrierea zecimală a numărului p .

Victor Nicolae și Petre Simion, G.M. Nr. 5/2012

c) Arătați că $\frac{1}{2\sqrt{2013}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{4025}{4026} < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4026}}$.

Florin Smeureanu

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

a) Deoarece $2k > 0$ și $2k+1 > 0$, $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1} \Leftrightarrow (2k-1)(2k+1) < 2k \cdot 2k \Leftrightarrow$

.....1 punct

$\Leftrightarrow 4k^2 - 1 < 4k^2$, ceea ce este evident adevărat.

.....1 punct

b) Conform subpunctului a), putem scrie succesiv:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \dots; \frac{99}{100} < \frac{100}{101}.$$

Înmulțind inegalitățile, membru cu membru, obținem:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{100}{101}$$

.....1 punct

$$p < \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{101} \Leftrightarrow p^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \text{ și cum } p > 0 \Rightarrow p < \frac{1}{10} \Leftrightarrow p < 0,1$$

Zecimea din scrierea zecimală a numărului p este 0.

.....1 punct

c) Fie $a = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{4025}{4026}$ și $b = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{4024}{4025}$. Se arată că $a > b$.

.....1 punct

$$\text{Din } a > b \Rightarrow a^2 > ab \Leftrightarrow a^2 > \frac{1}{4 \cdot 2013} \Rightarrow a > \frac{1}{2\sqrt{2013}}$$

.....1 punct

$$\text{Fie } c = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{4024}{4025}$$

$$\text{Obținem } a < c \Rightarrow a^2 < ac \Leftrightarrow a^2 < \frac{3}{8 \cdot 2013} \Rightarrow a < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4026}}.$$

.....1 punct



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL al II-lea

a) Determinați numărul real a , știind că $\sqrt{5(a-6)^2} = 20$.

b) Calculați $\sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

c) Determinați numerele raționale x și y , astfel încât

$$\frac{\sqrt{25(x-6)^2 - 10\sqrt{1006009}}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{9(y+2)^2 - 30\sqrt{40401}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{8-2\sqrt{15}}.$$

Ștefan Smărândoiu

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

a) $\sqrt{5(a-6)^2} = 20 \Leftrightarrow |a-6|\sqrt{5} = 20 \Leftrightarrow$

.....1 punct

$|a-6| = 4\sqrt{5} \Rightarrow a-6 = 4\sqrt{5} \text{ sau } a-6 = -4\sqrt{5} \Rightarrow a \in \{6-4\sqrt{5}; 6+4\sqrt{5}\} \subset \mathbb{R}.$

.....1 punct

b) $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

.....1 punct

$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$. Suma este egală cu $2\sqrt{5}$.

.....1 punct

c) $\frac{5|x-6|-10\cdot 1003}{\sqrt{5}} - \frac{3|y+2|-30\cdot 201}{\sqrt{3}} = \sqrt{5} - \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$|x-6|\sqrt{5} - 2007\sqrt{5} = |y+2|\sqrt{3} - 2011\sqrt{3}$

$|x-6|\sqrt{15} - 2007\sqrt{15} = 3|y+2| - 2011\cdot 3;$

$\left. \begin{aligned} (|x-6|-2007)\sqrt{15} &= 3(|y+2|-2011) \\ \forall y \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3(|y+2|-2011) &\in \mathbb{Q} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (|x-6|-2007)\sqrt{15} \in \mathbb{Q}$

.....1 punct

$\left. \begin{aligned} (|x-6|-2007)\sqrt{15} &\in \mathbb{Q} \\ \forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow (|x-6|-2007) &\in \mathbb{Q} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |x-6|-2007 = 0 \Rightarrow x \in \{-2001; 2013\} \subset \mathbb{Q}$

.....1 punct

$\left. \begin{aligned} (|x-6|-2007)\sqrt{15} &= 3(|y+2|-2011) \\ (|x-6|-2007) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |y+2|-2011 = 0 \Rightarrow y \in \{-2013; 2009\} \subset \mathbb{Q}$

Problema admite 4 soluții: $(x; y) \in \{(-2001; -2013), (-2001; 2009), (2013; -2013), (2013; 2009)\}$...1 punct



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL al III-lea

Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$ și punctele E, F, M, N, P, R mijloacele segmentelor $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC]$, respectiv, $[BD]$. Demonstrați că:

- a) Patrulaterul $MNEF$ este paralelogram; b) Dreptele ME, NF, PR sunt concurente;

c) $ON + OF = \frac{AD + BC}{2} \Leftrightarrow OE + OM = \frac{AB + CD}{2}.$

Constantin Bărescu

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

- a) $[MN]$ este linie mijlocie în $\triangle ACD \Rightarrow MN \parallel AC$ și $MN = \frac{1}{2} AC$ 1 punct

Patrulaterul $MNEF$ este paralelogram.1 punct

- b) $MNEF$ este paralelogram $\Rightarrow \exists H$ a.î. $ME \cap NF = \{H\}$, cu H mijlocul segmentului $[NF]$ 1 punct

$FRNP$ este paralelogram $\Rightarrow PR$ trece prin H , mijlocul segmentului $[NF]$ 1 punct

- c) " $\Rightarrow$ "

1) Dacă $m(\sphericalangle AOD) < 90^0$. Fie $T \in (NO)$ a.î. $NT = NA$;

$$\left. \begin{array}{l} [TN] \text{ este mediană în } \triangle ATD \\ \text{Din } TN = \frac{1}{2} AD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ATD \text{ este dreptunghic în } T$$

$$m(\sphericalangle ATD) = 90^\circ = m(\sphericalangle ATN) + m(\sphericalangle DTN) > m(\sphericalangle AOT) + m(\sphericalangle DOT) = m(\sphericalangle AOD) \Rightarrow T \in (ON)$$

Analog, fie $Q \in (FO)$ a.î. $OF = FB$; Obținem $Q \in (OF)$ și $m(\sphericalangle BQC) = 90^\circ$;

Atunci $ON + OF > TN + QF = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}$, ceea ce reprezintă o contradicție.1 punct

2) Dacă $m(\sphericalangle AOD) > 90^0$., ajungem la aceeași contradicție.

Deci $m(\sphericalangle AOD) = 90^0 \Rightarrow \triangle DOC$ și $\triangle AOB$ sunt dreptunghice cu $[OM]$, respectiv $[OE]$ mediane.

Atunci $OM + OE = \frac{1}{2} DC + \frac{1}{2} AB = \frac{AB + CD}{2}$1 punct

" $\Leftarrow$ "

Se tratează analog1 punct



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VII-a

SUBIECTUL al IV-lea

În triunghiul ABC cu $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, $[AD]$ este mediană cu $D \in (BC)$ și $E \in (AB)$, astfel încât $CE \perp AB$.
Fie $AD \cap CE = \{T\}$ și $BT \cap AC = \{F\}$. Pe latura $[AC]$ există un punct G egal depărtat de AB și BC .

Să se arate că:

a) $BC = 2 \cdot DF$;

b) $DE^2 = \frac{BE \cdot AB}{2}$;

c) $\frac{1}{CG} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{AC}$.

Gheorghe Radu

Ștefan Smărăndoiu

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

a) $\triangle ABC$ este isoscel de bază $[BC]$ cu $[AD]$ mediană AD este înălțime în $\triangle ABC$

$\left. \begin{array}{l} AD \text{ este înălțime în } \triangle ABC \\ CE \text{ este înălțime în } \triangle ABC \\ AD \cap CE = \{T\} \end{array} \right\} \Rightarrow T \text{ este ortocentrul } \triangle\text{-lui } ABC$

.....1 punct

Atunci BF este înălțime în $\triangle ABC \Rightarrow \triangle BFC$ este dreptunghic în F

$\left. \begin{array}{l} \triangle BFC \text{ dr. în } F \\ [FD] \text{ este mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow FD = \frac{1}{2} BC \Leftrightarrow BC = 2FD.$

.....1 punct

b) $\triangle ADB \sim \triangle CEB (U.U.) \Rightarrow \frac{AD}{CE} = \frac{BD}{BE} = \frac{AB}{BC}$

.....1 punct

$[DE]$ este mediană în $\triangle EBC$ dr. în $E \Rightarrow DE = BD$

$$\frac{DE}{BE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{AB}{2BD} \Rightarrow \frac{DE}{BE} = \frac{AB}{2DE} \Rightarrow DE^2 = \frac{AB \cdot BE}{2}$$

.....1 punct

c) Pe latura $[AC]$ există un punct G egal depărtat de AB și $BC \Rightarrow (BG$ este
este bisectoare în $\triangle ABC$;

.....1 punct

$[BG$ este bisectoare în $\triangle ABC \Rightarrow \frac{CG}{GA} = \frac{BC}{AB}$

.....1 punct

$$\begin{aligned} \frac{CG}{GA} = \frac{BC}{AB} &\Rightarrow \frac{CG}{GA+CG} = \frac{BC}{AB+BC} \Rightarrow \frac{CG}{AC} = \frac{BC}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{AB+BC}{BC} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{AB+BC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{CG} = \frac{AB}{BC} + \frac{BC}{BC} \Rightarrow \frac{AC}{CG} - \frac{AC}{BC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{CG} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{AC}. \end{aligned}$$

.....1 punct