

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 23 februarie 2018

CLASA a VI-a

SOLUȚII ȘI BAREM

1.	<i>Arătați că:</i>	
	a) Aflați a 2018-a zecimală a numărului $n = \frac{6}{7} + \frac{7}{6}$.	
	b) Determinați numerele $\overline{abcd}$ cu proprietățile: $\overline{ab} = 2 \cdot \overline{cb}$ și $4 \cdot \overline{ab} = \overline{db}$.	
	a) $n = \frac{85}{42} \Rightarrow n = 2,0(238095)$.	1p
	Numărul n are o singură cifră zecimală (0) la partea neperiodică și 6 cifre la partea periodică $2018 - 1 = 2017$; $2017 = 6 \cdot 336 + 1$	1p
	$\Rightarrow a$ 2018 – a zecimală este prima cifră din perioadă, adică 2.	1p
	b) Din prima relație deducem că $\overline{ab}$ este număr par, deci $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $u(2 \cdot \overline{cb}) = b \Rightarrow b = 0$.	1p
	$\overline{a0} = 2 \cdot \overline{c0} \Rightarrow a = 2c$ și cum $a \neq 0$, rezultă $c \neq 0$; din a doua relație deducem că și $d \neq 0$	1p
2.	a) Comparați $3^2 + 4^2$ cu 5^2 .	
	b) Arătați că: $3^{2018} + 4^{2018} < 5^{2018}$.	
	a) Calculează $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$	1p
	$3^2 + 4^2 = 5^2$	1p
	b) $5^{2018} = 5^2 \cdot 5^{2016} = (3^2 + 4^2) \cdot 5^{2016} = 3^2 \cdot 5^{2016} + 4^2 \cdot 5^{2016}$	2p
	$3^{2018} = 3^2 \cdot 3^{2016} < 3^2 \cdot 5^{2016}$	1p
3.	$4^{2018} = 4^2 \cdot 4^{2016} < 4^2 \cdot 5^{2016}$	1p
	$3^{2018} + 4^{2018} < 3^2 \cdot 5^{2016} + 4^2 \cdot 5^{2016} \Rightarrow 3^{2018} + 4^{2018} < 5^{2018}$	1p
3. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare, astfel încât $B \in [AC]$, $C \in [BD]$, $BC = 3 \cdot AB$, $CD = 2 \cdot BC$, punctele M și N mijloacele segmentelor $[AC]$, respectiv $[AD]$ și $MN = 18\text{cm}$.		

	a) Calculați lungimea segmentului $[BC]$. b) Arătați că $BM = CN$.	
	a) Notăm cu x lungimea segmentului $[AB]$; atunci: $BC = 3 \cdot x$, $CD = 6 \cdot x$, $AC = 4 \cdot x$	1p
	$AD = AB + BC + CD = x + 3x + 6x = 10x$	1p
	$AD = AM + MN + ND = 2x + MN + 5x = 7x + MN$	1p
	$10x = 7x + MN \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6\text{cm}$	1p
	$BC = 18\text{cm}$	1p
	b) $BM = AM - AB = \frac{AC}{2} - AB = 2x - x = x$	1p
	$CN = CD - ND = 6x - \frac{AD}{2} = 6x - 5x = x$	1p
	4. În figura alăturată, $m(\angle AOD) = 140^\circ$, $b \cdot m(\angle AOB) = a \cdot m(\angle BOC)$, $c \cdot m(\angle BOC) = b \cdot m(\angle COD)$, unde a, b, c sunt numere prime distincte, astfel încât $7 \cdot a + 14 \cdot b + 2 \cdot c = 77$. Dacă $[OF]$ este bisectoarea unghiului $\angle AOB$ și $[OE]$ este bisectoarea unghiului $\angle COD$, calculați măsura unghiului $\angle FOE$.	
	$7 \cdot a + 14 \cdot b + 2 \cdot c = 77 \Rightarrow 7/2c, (2,7)=1, c \text{ prim, deci } c = 7$	1p
	$7 \cdot a + 14 \cdot b + 2 \cdot 7 = 77 \Leftrightarrow 7a + 14b = 63 \Leftrightarrow a + 2b = 9$; cum a și b sunt prime și distincte, singura variantă este $a = 5$ și $b = 2$	2p
	Notăm $m(\angle AOB) = x$, $m(\angle BOC) = y$, $m(\angle COD) = z$. Atunci $x + y + z = 140^\circ$, $2x = 5y$, $7y = 2z$, de unde $x = 50^\circ$, $y = 20^\circ$, $z = 70^\circ$	2p
	$[OF]$ este bisectoarea unghiului $\angle AOB \Rightarrow m(\angle FOB) = 25^\circ$, $[OE]$ este bisectoarea unghiului $\angle COD \Rightarrow m(\angle EOC) = 35^\circ$	1p
	Finalizare $m(\angle FOE) = 80^\circ$	1p