

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

Barem – Clasa a VI-a

SUBIECTUL I (7p)

a) Arătați că numerele 673 și 1009 sunt prime. Descompuneți în factori primi numerele 2018 și 2019.

b) Aflați numerele naturale a și b , știind că b este număr prim și $(a; b) + [a; b] = 2019$.

Soluție:

a) 673 este prim 1p

1009 este prim 1p

$2018 = 2 \cdot 1009$; $2019 = 3 \cdot 673$ 1p

b) b este număr prim și prin urmare $(a; b) = 1$ sau $(a; b) = b$ 1p

Dacă $(a; b) = 1 \Rightarrow [a; b] = a \cdot b = 2018 \Rightarrow (a; b) \in \{(2; 1009), (1009; 2)\}$ 1p

Dacă $(a; b) = b \Rightarrow b \mid a$ și $[a; b] = a$. Obținem $b + a = 2019$.

$b \mid a$ și $b \mid b \Rightarrow b \mid (a + b) \Rightarrow b \mid 2019 \Rightarrow b \in \{3; 673\}$ 1p

$(a; b) \in \{(3; 2016), (673; 1346)\}$ 1p

SUBIECTUL II (7p)

a) Aflați 50 de numere naturale impare consecutive știind că primul și ultimul sunt invers proporționale cu 0,5 și 0,1(6). Arătați că suma lor este un pătrat perfect.

b) Arătați că dacă suma a 45 de numere impare este egală cu 2019, atunci cel puțin două dintre numere sunt egale.

Soluție:

a) Notăm cu $x, x + 2, x + 4, \dots, x + 98$ numerele și obținem $\frac{x}{2} = \frac{x + 98}{6}$ 1p

$x = 49$ și numerele sunt 49, 51, 53, ..., 147..... 2p

Suma numerelor este $S = 25 \cdot 196 = (5 \cdot 14)^2$, deci este pătrat perfect 2p

b) Dacă prin absurd numerele ar fi diferite suma lor ar trebui să fie cel puțin egală cu suma $1 + 3 + 5 + \dots + 89$ 1p

$1 + 3 + 5 + \dots + 89 = 2025$ și $2025 > 2019$. Finalizare 1p



SUBIECTUL III (7p)

Se consideră A mulțimea tuturor numerelor naturale $\overline{abc}$, scrise cu trei cifre consecutive, nu neapărat în ordine crescătoare.

- Arătați că orice număr din mulțimea A este divizibil cu 3.
- Determinați cardinalul mulțimii A .
- Demonstrați că, oricum am alege niște elemente din mulțimea A , suma acestora nu poate egală cu 2018.
- Arătați că există numere din mulțimea A cu suma 2019.

Soluție:

- a) Un număr scris cu trei cifre consecutive $a, a + 1, a + 2$ are suma cifrelor

$3a + 6 = 3(a + 2)$, deci este divizibil cu 3 1p

- b) Cu cifrele 0, 1, 2 se pot forma 4 numere 1p

Cu tripletele de cifre (1; 2; 3), (2; 3; 4), (3; 4; 5), (4; 5; 6), (5; 6; 7), (6; 7; 8), (7; 8; 9) se pot forma câte 6 numere.

Cardinalul mulțimii A este 46 2p

- c) Suma oricăror numere din A este multiplu de 3 și 2018 nu este multiplu de 3. Concluzia 2p

- d) Scrierea unui exemplu ($2019 = 987 + 687 + 345$; $2019 = 675 + 675 + 345 + 324$; ...) 1p

SUBIECTUL IV (7p)

Se consideră unghiurile AOB , BOC și BOD astfel încât $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente suplementare, iar unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOD$ sunt neadiacente complementare. Dacă $\angle COD = 135^\circ$, determinați măsura unghiului AOB .

Gazeta Matematică

Soluție:

$\angle AOD = 45^\circ$ 1p

Dacă B și D sunt de aceeași parte a dreptei AC :

Notăm $\angle BOD = x^\circ \Rightarrow \angle AOB = x + 45$ 1p

$x + x + 45 = 90 \Rightarrow x = 22^\circ 30'$ 1p

$\angle AOB = 67^\circ 30'$ 1p

Dacă B și D sunt de o parte și de alta a dreptei AC :

Notăm $\angle AOB = x^\circ \Rightarrow \angle BOD = x + 45$ 1p

$x + x + 45 = 90 \Rightarrow x = 22^\circ 30'$ 1p

$\angle AOB = 22^\circ 30'$ 1p