



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013**

CLASA a XI - a

Subiectul 1

- a) Arătați că oricare matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică ecuația $X^2 - \text{Tr}(A) \cdot X + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, numită ecuația lui Cayley-Hamilton.
- b) Arătați că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisface egalitatea $A^4 = I_2$, atunci $A^2 = I_2$ sau $A^2 = -I_2$.

* * *

Rezolvare

- a) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se arată prin calcul că $A^2 - (a + d) \cdot A + (ad - bc) \cdot I_2 = O_2$.
- b) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^4 = I_2$. Atunci $\det(A^4) = 1$, de unde obținem $\det(A) = \pm 1$. Din teorema lui Cayley-Hamilton obținem $A^4 - \text{Tr}(A^2) \cdot A^2 + I_2 = O_2$, adică $\text{Tr}(A^2) \cdot A^2 = I_2$.

Trecând la urmă rezultă $(\text{Tr}(A^2))^2 = \text{Tr}(I_2) = 4$, de unde $\text{Tr}(A^2) = \pm 2$. Obținem imediat că

$$A^2 = I_2 \text{ sau } A^2 = -I_2. \quad 7p$$

Subiectul 2

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care verifică relațiile $A^{2002} = A^{2003}$ și $A + B = I_n$.
Arătați că $I_n - AB$ este matrice inversabilă.

(G.M.3/2003-Claudiu Coandă)

Rezolvare

$$A + B = I_n \Rightarrow B = I_n - A \Rightarrow AB = A - A^2, BA = A - A^2 \Rightarrow AB = BA.$$

Din $A^{2002} = A^{2003} \Rightarrow A^{2002}(I_n - A) = O_n$, deci $A^{2002}B = O_n$. De aici și din faptul că $AB = BA$, obținem $(AB)^{2002} = A^{2002}B^{2002} = (A^{2002}B)B^{2001} = O_n$.

Atunci $I_n = I_n - (AB)^{2002} = (I_n - AB)(I_n + AB + (AB)^2 + \dots + (AB)^{2001})$, de unde rezultă că matricea $I_n - AB$ este inversabilă. 7p

Subiectul 3

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale definit prin $x_0 = a > 0, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n}, (\forall) n \in \mathbb{N}$.

Calculați:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n; \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{x_n^2}; \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

* * *

Rezolvare

- a) Se arată inductiv că $x_n > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}$. Din $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} > 0$, adică șirul (x_n) este strict crescător, rezultă că (x_n) are limită, finită sau infinită. Presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l > 0$. Trecând la limită în relația de recurență, rezultă $l^2 = l^2 + 1$, contradicție.

Prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{x_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n^2} \right)^{x_n^2} = e$.

c) Aplicând lema lui Cesaro-Stolz obținem: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1}^2 - x_n^2) = 2$, rezultă
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$. 7p

Subiectul 4

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale definit prin

$x_1 \in (1, 2), x_{n+1} = 1 + \sqrt{2x_n - x_n^2}, (\forall) n \geq 1$.

Să se studieze convergența șirului.

* * *

Rezolvare

Avem $x_{n+1} - 1 = \sqrt{1 - (1 - x_n)^2}, (\forall) n \geq 1$ (1). Se arată cu ușurință că $x_n \in (1, 2), (\forall) n \geq 1$.

Dacă notăm $a_n = x_n - 1 \in (0, 1), (\forall) n \geq 1$, atunci din (1), obținem $a_{n+1}^2 + a_n^2 = 1, (\forall) n \geq 1$.

Cum și $a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 = 1, (\forall) n \geq 1$, rezultă imediat că $a_{n+2} = a_n, (\forall) n \geq 1$.

Prin urmare $a_2 = a_4 = a_6 = \dots$ și $a_1 = a_3 = a_5 = \dots$. Deducem de aici că șirul (a_n) este

convergent dacă și numai dacă $a_2 = a_1$ adică $a_1 = a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Prin urmare șirul (x_n) este

convergent dacă și numai dacă $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. 7p