

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 28.02.2015
Clasa a X-a

1. (7p) Arătați că:

$$\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3} + \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \sqrt[3]{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} < \frac{n^2 + n - 2}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

2. (7p) Rezolvați în $\mathbb{R}^*$ ecuația: $2^{2x-x^2} = \frac{x^4+1}{x^2}.$

Ileana Oțoiu

3. Se consideră $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și numerele $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$ și $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$. Demonstrați că:

(4p) a) $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

(3p) b) $|z - z_1| + |z - z_2| + \dots + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$, pentru orice $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$.

GM12/2014

4. (7p) Dacă $x_i \in [a^2; a^3], a > 1, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că:

$$(\log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n)(\log_{x_1} a + \log_{x_2} a + \dots + \log_{x_n} a) \leq \frac{25}{24} n^2.$$

Doriana Dorca

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.