



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a IX-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z cu proprietatea că $x + y + z = 1$.

(3p) a) Să se arate că $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \geq xyz$.

(4p) b) Să se arate că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \sqrt{\frac{3}{xyz}}$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 &\geq xyz = xyz \cdot 1 = xyz(x + y + z) \quad \dots\dots\dots 2p \\ \Leftrightarrow 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 &\geq 2x^2yz + 2xy^2z + 2xyz^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (xy - xz)^2 + (zy - xy)^2 + (xz - zy)^2 \geq 0 \text{ adevăr} \quad \dots\dots\dots 1p$$

b) Ridicăm la puterea a 2-a relația și obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}\right) &\geq \frac{3}{xyz} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right) &\geq \frac{3}{xyz} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2 \cdot \frac{1}{xyz} \geq \frac{3}{xyz} \quad \dots\dots\dots 3p \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &\geq \frac{1}{xyz} \end{aligned}$$

Se aduce ultima relație la același numitor obținându-se relația de la punctul a) 1p

Problema 2

(3p) a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\left(3x - \frac{5}{2}\right) + \left(3x - \frac{11}{2}\right) + \left(3x - \frac{17}{2}\right) + \dots + \left(3x - \frac{119}{2}\right) = 790$.

(4p) b) Să se demonstreze că $[x] + [2x] + \dots + [nx] = \frac{[nx](n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ dacă și numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.

Soluție:

a) 5, 11, 17, ..., 119 sunt în progresie aritmetică, deci $a_1 = 5, a_n = 119, n = 20$ 1p



$$\left(3x - \frac{5}{2}\right) + \left(3x - \frac{11}{2}\right) + \left(3x - \frac{17}{2}\right) + \dots + \left(3x - \frac{119}{2}\right) = 20 \cdot 3x - \frac{1}{2}(5 + 7 + 17 + \dots + 119)$$

$$= 60x - \frac{1}{2} \cdot \frac{(5+119) \cdot 20}{2} = 60x - 620 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$60x - 620 = 790 \Rightarrow 60x = 1410 \Rightarrow x = \frac{47}{2} \quad \dots\dots\dots 1p$$

b) " $\Leftarrow$ " $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [nx] = nx, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și egalitatea din enunț este adevărată $\dots\dots\dots 1p$

" $\Rightarrow$ " Pornim de la egalitatea $[x] + [2x] + \dots + [nx] + [(n+1)x] = [(n+1)x] \frac{n+2}{2}$

$$\Rightarrow [nx] \frac{n+1}{2} = [(n+1)x] \frac{n}{2} \Rightarrow [nx](n+1) = [(n+1)x]n \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$(n+1)[n\{x\} + n\{x\}] = n[(n+1)[x] + (n+1)\{x\}] \Rightarrow \frac{[n\{x\}]}{n} = \frac{[(n+1)\{x\}]}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dots\dots\dots 1p$$

Pentru $n = 1, 2, 3, \dots$ obținem $0 = \frac{[\{x\}]}{1} = \frac{[2\{x\}]}{2} = \frac{[3\{x\}]}{3} = \dots = \frac{[n\{x\}]}{n}$. Cum $\{x\} \in [0, 1) \Rightarrow [\{x\}] = 0$

Deci $[n\{x\}] = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. În concluzie $x \in \mathbb{Z} \quad \dots\dots\dots 1p$

Problema 3

Să se determine toate tripletele de numere naturale nenule consecutive cu proprietatea că suma celor șase fracții obținute din aceste numere este număr întreg.

(Gazeta Matematică 1/2018)

Soluție:

Fie $n-1, n, n+1$ cele trei numere consecutive $\dots\dots\dots 1p$

Avem $\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n+1} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n-1} = 2 + \frac{2n+1}{n-1} + \frac{2n-1}{n+1} = \dots\dots\dots 3p$

$$= 6 + \frac{6}{n^2-1} \in \mathbb{Z} \text{ rezultă că } n^2 - 1 \mid 6 \text{ rezultă } n=2 \text{ deci tripletul este } (1, 2, 3) \dots\dots\dots 3p$$

Problema 4

În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile echilaterale ABM, BCN și ACP , care au centrele C_1, A_1 și B_1 . Notăm cu G, G' respectiv G'' centrele de greutate ale triunghiurilor $ABC, A_1B_1C_1$ și MNP . Să se arate că $\overrightarrow{G'G''} = 2\overrightarrow{GG'}$.



Soluție :

Fie X un punct în planul triunghiului ABC . Atunci

$$3\overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} , 3\overrightarrow{XG'} = \overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} = \dots\dots\dots(2p)$$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XP}) =$$

$$2 \frac{\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}}{3} + \frac{\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XP}}{3} = 2\overrightarrow{XG} + \overrightarrow{XG''} \dots\dots\dots(3p)$$

$$\text{rezultă } \overrightarrow{G'G''} = 2\overrightarrow{GG'} \dots\dots\dots(2p)$$