

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 18 FEBRUARIE 2019

CLASA A IX A

MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Problema 1.(7p)

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$25 \{x\}^2 + 1 = 10x.$$

Întrucât $x = [x] + \{x\}$, ecuația devine : $25 \{x\}^2 + 1 = 10[x] + 10\{x\} \dots \dots \dots (2p)$

$$\Leftrightarrow (5\{x\} - 1)^2 = 10[x] \dots \dots \dots (1p)$$

Deoarece $\{x\} \in [0,1)$, rezultă $10[x] \in [0,16)$, de unde $[x] \in \{0,1\} \dots \dots \dots (2p)$

$$\text{Dacă } [x] = 0 \text{ rezultă } \{x\} = \frac{1}{5} \text{ și } x = \frac{1}{5} \dots \dots \dots (1p)$$

$$\text{Dacă } [x] = 1 \text{ rezultă } \{x\} = \frac{\sqrt{10} + 1}{5} \text{ și } x = \frac{6 + \sqrt{10}}{5} \dots \dots \dots (1p)$$

Problema 2.(7p)

Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, n \geq 1$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^n \frac{3-a_k}{a_k-1}$

$$a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4} \dots \dots \dots 1p$$

$$P(n) : a_n = 1 + \frac{1}{n}, n \geq 1 \text{ (demonstrația prin inducție) } \dots \dots \dots 3p$$

$$\frac{3-a_k}{a_k-1} = 2k - 1 \dots \dots \dots 1p$$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3.(7p)

Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} + \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} + \dots + \frac{\sqrt{2n+2}}{2n+3} < \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+4}}.$$

$$\text{Avem } \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+2)^2}} < \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+2)^2 - 1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)(n+3)}} = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \dots\dots\dots 2p$$

Analog avem

$$\frac{\sqrt{n+2}}{n+3} = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{(n+3)^2}} < \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{(n+3)^2}} = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{(n+2)(n+4)}} = \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

..... 3p

$$\frac{\sqrt{2n+2}}{2n+3} = \frac{\sqrt{2n+2}}{\sqrt{(2n+3)^2}} < \frac{\sqrt{2n+2}}{\sqrt{(2n+3)^2}} = \frac{\sqrt{2n+2}}{\sqrt{(2n+2)(2n+4)}} = \frac{1}{\sqrt{2n+4}}$$

Adunând aceste relații membru cu membru obținem inegalitatea cerută..... 2p

Problema 4.(7p)

Fie ABC un triunghi, D mijlocul lui (AC) și M un punct în plan astfel încât:

$$\vec{MA} + a \cdot \vec{MB} = b \cdot \vec{MD}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

(3p) a) Dacă $a = b = 1$, arătați că $\vec{MD} = \vec{BC}$.

(4p) b) Dacă $\vec{MD} = \vec{BC}$, arătați că $a = b = 1$.

a) Rezultă $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MD}$.

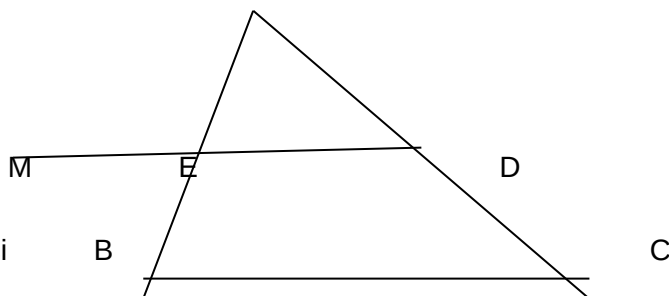
Dacă E este mijlocul lui (AB),

avem $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{ME}$, deci relația devine

$\vec{MD} = 2\vec{ME}$, deci punctele M, E, D coliniare și

$MD = 2ME$, rezultă $MD = 2ED = BC$ și $MD \parallel BC$.

Deci $\vec{MD} = 2\vec{ME} = 2\vec{ED} = \vec{BC}$ (3p)



b) Avem: $\vec{MA} + \vec{MC} = 2\vec{MD}$, deci $\vec{MA} = 2\vec{MD} - \vec{MC}$. Înlocuind în relația dată rezultă:

$2\vec{MD} - \vec{MC} + a\vec{MB} = b\vec{MD}$, adică $(2 - b)\vec{MD} - \vec{MC} + a\vec{MB} = \vec{0}$. Dar $\vec{MD} = \vec{BC} = \vec{BM} + \vec{MC}$ și înlocuind, rezultă: $(2 - b)(\vec{BM} + \vec{MC}) - \vec{MC} + a\vec{MB} = \vec{0}$, adică $(2 - b)(\vec{MC} - \vec{MB}) - \vec{MC} + a\vec{MB} = \vec{0}$ sau $\vec{MC}(2 - b - 1) + \vec{MB}(a - 2 + b) = \vec{0}$. Deoarece

$\vec{MD} = \vec{BC}$ vectorii $\vec{MB}$ și $\vec{MC}$ nu pot fi coliniari, deci $2 - b - 1 = 0$ și $a - 2 + b = 0$, adică $a = b = 1$ **(4p)**

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 18.02.2019

CLASA A IX-A M2

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Problema 1.(7p)

(2p) a) Dacă $A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$, calculați $(A-5)^{2019}$.

(2p) b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 2019$.

(3p) c) Dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și $ab+bc+ca = 1$, arătați că $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \in \mathbb{Q}$.

a) $A = |2 + \sqrt{3}| + |2 - \sqrt{3}| = 4$, $(A-5)^{2019} = -1$ 2p

b) Se raționalizează numitorii și după reducerea termenilor asemenea se obține $-1 + \sqrt{n} = 2019$, adică $n = 2020^2$ 2p

c) Se observă că $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+c)(a+b)$, $1+b^2=(b+a)(b+c)$ și $1+c^2=(c+a)(c+b)$ 2p

$$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} = \sqrt{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2} = |a+b| \cdot |a+c| \cdot |b+c| \in \mathbb{Q}$$

1p

Problema 2.(7p)

(3p) a) Demonstrați că pentru orice număr natural nenul n , egalitatea următoare este adevărată

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

(4p) b) Fie $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x+y=\frac{z}{c}$, $y+z=\frac{x}{a}$, $z+x=\frac{y}{b}$.

Arătați că $\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) \in \mathbb{N}$.

a) Egalitatea se demonstrează prin inducție matematică.

Etapa de verificare

1p

Etapa demonstrației

2p

b) Din $x + y = \frac{z}{c}$ se obține $\frac{1}{c} = \frac{x+y}{z}$, adică $\frac{1}{1+c} = \frac{x+y}{x+y+z}$. Analog din

3p

$y + z = \frac{x}{a}$ și din $z + x = \frac{y}{b}$ obținem $\frac{1}{1+a} = \frac{y+z}{x+y+z}$ și $\frac{1}{1+b} = \frac{z+x}{x+y+z}$

1p

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2 \in \mathbb{N}$$

Problema 3.(7p)

Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică, notăm $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(1p) a) Dacă $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, calculați a_{10} .

(3p) b) Calculați S_{30} , dacă $a_8 + a_{13} + a_{18} + a_{23} = 30$.

(3p) c) Dacă $S_3 = S_5$, calculați S_8 .

a) $a_{10} = S_{10} - S_9 = 145 - 117 = 28$

1p

b) Din $a_8 + a_{13} + a_{18} + a_{23} = 30$ se obține că $2a_1 + 29r = 15$
 $S_{30} = (2a_1 + 29r) \cdot 15 = 225$

2p

c) Din $S_3 = S_5$ se obține că $2a_1 + 7r = 0$, adică
 $S_8 = (2a_1 + 7r) \cdot 4 = 0$

1p

2p

1p

Problema 4.(7p)

Se notează cu F mijlocul laturii (BC) a unui triunghi ABC, cu G mijlocul segmentului (AF) și se consideră punctele D și E astfel încât $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$.

(3p) a) Determinați $k \in \mathbb{Q}$ pentru care DE și BC sunt paralele.

(4p) b) Demonstrați că $4\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

a) Din $DE \parallel BC$ rezultă că $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, adică $\frac{AE}{EC} = 2$. Avem că $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$

2p

1p

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

b) Din $2\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}$ rezultă că $4\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

3p
1p

Cum $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, obținem $4\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 18.02.2019

CLASA A X-A

MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Problema 1.(7p)

(4p) a) Să se arate că pentru oricare $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ are loc relația :

$$|z_1 \cdot \overline{z_2} + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2).$$

(3p) b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația : $z^2 = \overline{z}$.

1. a) $|z_1 \cdot \overline{z_2} + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 \cdot \overline{z_2} + 1)(\overline{z_1 \cdot \overline{z_2} + 1}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = \dots\dots\dots 1p$

$(z_1 \cdot \overline{z_2} + 1)(\overline{z_1 \cdot \overline{z_2} + 1}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 + 1 + |z_1|^2 - z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 + |z_2|^2 = \dots 2p$

$= (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) \dots\dots\dots 1p$

b) $z^2 = \overline{z} \Rightarrow |z|^2 = |\overline{z}| \Rightarrow |z|^2 = |z| \Rightarrow |z| \in \{0, 1\}$, dacă $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$ soluție.....1p

Dacă $|z| = 1 \Rightarrow z \cdot \overline{z} = 1 \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{z} \Rightarrow$ ecuația devine $z^3 = 1 \Rightarrow z_1 = 1, z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 2p$

Problema 2.(7p)

(7p) Să se cerceteze injectivitatea și surjectivitatea funcției :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x \leq 0 \\ x^2+2x+3, & x > 0 \end{cases}$$

2. f strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și pe $(0, \infty)$, deci injectivă pe $(-\infty, 0]$ și pe $(0, \infty)$ (1).....**3p**

$$f((-\infty, 0]) = (-\infty, 2]; f((0, \infty)) = (3, \infty) \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$f((-\infty, 0]) \cap f((0, \infty)) = \emptyset \quad (2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f \text{ injectivă} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$f((-\infty, 0]) \cup f((0, \infty)) = \mathbb{R} \setminus (2, 3] \neq \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ nu este surjectivă} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Problema 3.(7p)

(4p) a) Să se rezolve ecuația $6 \cdot 9^{5x} - 13 \cdot 6^{5x} + 6 \cdot 4^{5x} = 0$.

(3p) b) Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{x+1} + 2\log_5(3x+4) + 2^{\frac{x-1}{3}} = 10$.

3.a) Se împarte ecuația prin $4^{5x} \neq 0$, notăm $\left(\frac{3}{2}\right)^{5x} = t > 0 \Rightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0 \dots\dots\dots \mathbf{2p}$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = -\frac{1}{5} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

b) Observăm $x=7$ soluție a ecuației**1p**

funcțiile $\sqrt[3]{x+1}, 2\log_5(3x+4), 2^{\frac{x-1}{3}}$ sunt compuneri de funcții strict crescătoare, deci sunt strict crescătoare
 $\Rightarrow$ suma lor este o funcție f strict crescătoare, deci injectivă $\Rightarrow$ ec $f(x)=10$ are soluție unică $x=7$
**2p**

Problema 4.(7p)

Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{x+21} + \sqrt{15-x} = 6$.

CE $x \leq 15$, notăm $\sqrt[3]{x+21} = u$ și $\sqrt{15-x} = v \geq 0$, ec devine $u+v=6 \Rightarrow v=6-u \dots\dots\dots \mathbf{2p}$

$$\left. \begin{array}{l} u^3 = x+21 \\ v^2 = 15-x \end{array} \right| \Rightarrow u^3 + v^2 = 36 \Rightarrow u^3 + (6-u)^2 = 36 \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$$u_1=0, v_1=6, x_1=-21 \text{ soluție}, u_2=3, v_2=3, x_2=6 \text{ soluție}, u_3=-4, v_3=10, x_3=-85 \text{ soluție} \dots\dots\dots \mathbf{3p}$$

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 18.02.2019

CLASA A X-A M2

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Problema 1.(7p)

Fie numerele reale $x = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ și $y = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$

(2p) a) Determinați numerele rationale a și b astfel încât

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = a - \sqrt{3}; \quad \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} = b + \sqrt{2};$$

(2p) b) Arătați că $x^2 = 16$ și $y^3 = 90 + 21y$;

(2p) c) Calculați $(y - x - 1)^{2019}$.

- a) Determinarea lui $a = 2$ și $b = 3$ cate 1 punct fiecare
- b) Vericarea prin calcul direct cate 1 punct fiecare
- c) Determinare $x = 4$ 1p
 $y = 6$ 1p
 finalizare1 p

Problema 2.(7p)

Dacă $\log_{20} 80 = a$, calculați $\log_{40} 160$ în funcție de a .

Schimband în baza 2 obținem $\log_{20} 80 = \frac{\log_2 80}{\log_2 20} = \frac{\log_2 5 + 4}{\log_2 5 + 2} = a \dots\dots\dots 2p$

$\log_2 5 = \frac{2a - 4}{1 - a} \dots\dots\dots 2p$

$\log_{40} 160 = \frac{\log_2 160}{\log_2 40} = \frac{5 + \frac{2a - 4}{1 - a}}{3 + \frac{2a - 4}{1 - a}} \dots\dots\dots 2p$

$= \frac{3a - 1}{a + 1} \dots\dots\dots 1 p$

Problema 3.(7p)

Fie ecuația $z^2 + 2z + 4 = 0$.

(2p) a) Determinați rădăcinile complexe z_1 și z_2 ;

(2p) b) Dacă a este o rădăcină a ecuației $z^2 + 2z + 4 = 0$, arătați că $a^3 = 8$;

(3p) c) Demonstrați că $z_1^{2019} + z_2^{2019}$ este pătrat perfect.

a) Rezolvarea ecuației $\dots\dots\dots 2p$

b) Dacă a rădăcină a ecuației avem $a^2 + 2a + 4 = 0$, $a^3 = a^2 \cdot a = (-2a - 4) \cdot a = -2a^2 - 4a = -2(-2a - 4) - 4a = 4a + 8 - 4a = 8 \dots\dots\dots 2p$

c) $z_1^{2019} = (z_1^3)^{673} = 8^{673} = 2^{2019}$; $z_1^{2019} + z_2^{2019} = 2^{2019} + 2^{2019} = 2 \cdot 2^{2019} = (2^{1010})^2$ pătrat perfect ...3p

Problema 4.(7p)

Determinați domeniul maxim de definiție al funcției $f : D \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lg(1 - 3x + 2x^2)}{-4x^2 - x}}$$

Condiția $\frac{\lg(1 - 3x + 2x^2)}{-4x^2 - x} \geq 0 \dots\dots\dots 1p$

Din $2x^2 - 3x + 1 > 0$ obținem $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty) \dots\dots\dots 2 p$

$\lg(1 - 3x + 2x^2) = 0$, avem $x = 0$ sau $x = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 1 p$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	∞
$\lg(2x^2 - 3x + 1)$	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++
$-4x^2 - x$	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
$\frac{\lg(1 - 3x + 2x^2)}{-4x^2 - x}$	-----	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++	+++++

Domeniul de definiție este $D = (-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}]$3 p

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 18.02.2019

CLASA A XI-A

MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Problema 1.(7p)

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ b & a & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Calculați A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A = aI_3 + B, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \end{pmatrix} B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \dots\dots\dots 2p$$

Rezultă $B^n = O_3$, $\forall n \geq 3$.

Cum $aI_3 \cdot B = B \cdot (aI_3)$, aplicăm binomul lui Newton: 1p

$$A^n = a^n I_3 + na^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}B^2 = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 \\ na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^n & na^n & a^n \end{pmatrix} \dots\dots\dots 4p$$

Problema 2.(7p)

Fie $A, B \in M_{2n}(C)$ matrici inversabile cu $A \cdot B^{-1} + A^{-1} \cdot B = I_{2n}$. Să se demonstreze că:

$$\det(A-B)^2 \cdot \det[(A^{-1})^2 + (B^{-1})^2] = 1$$

Prin înmulțirea relației $A \cdot B^{-1} + A^{-1} \cdot B = I_{2n}$ cu A la stânga, respectiv cu B la dreapta obținem $A^2 + B^2 = AB$, de unde $(A - B)^2 = -BA$ 2p

Analog prin înmulțirea cu A^{-1} la stânga și cu B^{-1} la dreapta în relația inițială obținem $(A^{-1})^2 + (B^{-1})^2 = A^{-1} \cdot B^{-1} = (BA)^{-1}$ 2p

Cum $(A - B)^2 \cdot [(A^{-1})^2 + (B^{-1})^2] = -BA \cdot (BA)^{-1} = -I_{2n}$, prin trecere la determinanți obținem:

$$\det(A-B)^2 \cdot \det[(A^{-1})^2 + (B^{-1})^2] = 1$$
3p

Problema 3. (7p)

Fie $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea că există $a > 1$ astfel încât $\frac{1}{2}a^x \leq f(x) \leq a^x$, $(\forall) x \geq 1$

Studiind convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, dat de: $\frac{1}{2}a^n \leq f(n) \leq a^n$, (2p)

$$\text{Prin sumare} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n) \leq \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}$$
 (1p)

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{\frac{a^{n+1} - a}{a - 1}}$$
 (1p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^{n+1} - a}{a - 1}} = 1 \cdot a = a$$
 (2p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$
 (1p)

Problema 4.(7p)

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale ce îndeplinește condițiile: (1) $x_n^4 - x_n^3 \cdot x_{n+1} \geq x_n^2 - 6x_n + 9$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$

(5p) a) Dacă presupunem că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător, arătați că este convergent și calculați limita sa.

(2p) 2) Este posibil ca un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ ce verifică relația (1) să aibă toți termenii negativi?

$$a) (1) \Leftrightarrow x_n^3(x_n - x_{n+1}) \geq (x_n - 3)^2 \geq 0, \forall n \geq 1$$
(2p)

$$x_n \geq x_{n+1} \Rightarrow x_n^3 > 0 \Rightarrow x_n > 0, \forall n \geq 1 \dots \dots \dots (1p)$$

$$(x_n)_{n \geq 1} \text{ e mărginit: } 0 < x_n \leq x_1, \forall n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ convergent} \dots \dots \dots (1p)$$

$$\text{Dacă } l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \text{ din (1)} \Rightarrow (l - 3)^2 \leq 0 \Rightarrow l = 3 \dots \dots \dots (1p)$$

- c) Presupunând $x_n < 0, \forall n \geq 1$, din (1) $\Rightarrow x_n - x_{n+1} < 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ convergent. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;
din (1) $\Rightarrow l = 3$, contradicție pentru că $l \in [x_1, 0]$(2p)

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE
SOLUȚII ȘI BAREME OLIMPIADA MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 18.02.2019
CLASA A XI A-M2

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Problema 1.(7p)

$$\text{În } M_3(\mathbb{R}) \text{ se consideră matricea } A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ unde } m > 0.$$

(1p) a) Calculați $A(e)$;

(2p) b) Arătați că $A(a)A(b) = A(ab)$;

(4p) c) Determinați a real pentru care $A(3^a)A(3^a - 2) = A(3)$.

$$\text{a) } A(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.....1p

$$\text{b) } A(a)A(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln a + \ln b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln ab \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(ab)$$

b).....2p

$$\text{c) Din b avem } A(3^a) \cdot A(3^a - 2) = A(3^a(3^a - 2)) \dots \dots \dots 2p$$

Obținem $3^{2a} - 2 \cdot 3^a = 3$, notăm $3^a = t$ și rezolvăm ecuația obținem rădăcinile -1 și 3.

De unde $a = 1$2p

Problema 2.(7p)

(3p) a) Rezolvați în C ecuația $\begin{vmatrix} x & -2 & 3 \\ -2 & 3 & x \\ 3 & x & -2 \end{vmatrix} = 0$

(4p) b) Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$. Arătați că, dacă $\begin{vmatrix} 1 & a+b & 2a-b \\ 1 & b+c & 2b-c \\ 1 & c+a & 2c-a \end{vmatrix} = 0$, atunci $a = b = c$.

a) Se rezolvă ecuația $-(x+1)(x^2-x+19) = 0$ și se obține că $x \in \left\{-1; \frac{1 \pm 5i\sqrt{3}}{2}\right\} \dots 3p$

b) În determinantul $\begin{vmatrix} 1 & a+b & 2a-b \\ 1 & b+c & 2b-c \\ 1 & c+a & 2c-a \end{vmatrix}$ se adună coloana 2 la coloana 3 și se obține $3 \begin{vmatrix} 1 & a+b & a \\ 1 & b+c & b \\ 1 & c+a & c \end{vmatrix}$

Se scade coloana 3 din coloana 2 și se obține $3 \begin{vmatrix} 1 & b & a \\ 1 & c & b \\ 1 & a & c \end{vmatrix} \dots \dots \dots 2p$

Așadar avem $3 \begin{vmatrix} 1 & b & a \\ 1 & c & b \\ 1 & a & c \end{vmatrix} = 3(a^2+b^2+c^2-ac-ab-bc) =$

$= \frac{3}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

Din $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0 \dots \dots \dots 2p$

Problema 3.(7p)

Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^2+bx}{x+2}, a, b \in \mathbb{R}$.

(2p) a) Aflați parametrii reali a și b astfel încât dreapta de ecuație $y=2x-3$ să fie asimptotă spre $+\infty$.

(3p) b) Pentru $a=2$ și $b=1$ să se determine asimptotele funcției.

(2p) c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 2x - 8}$.

a) Dreapta $y=2x-3$ este A.Ob. $y=mx+n$, de unde rezultă că $m=2$ și $n=-3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = -3$$

$$a = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + bx}{x+2} - 2x \right) = -3 \rightarrow a = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b-4)x}{x+2} = -3 \rightarrow a = 2, b = 1. \dots\dots\dots 2p$$

b) A.V. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x}{x+2} = \frac{6}{-0} = -\infty, x < -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x}{x+2} = \frac{6}{+0} = +\infty, x > -2$$

de unde rezultă că dreapta de ecuație $x = -2$ este A.V. la

graficul funcției spre stânga și spre dreapta.

La $+\infty$ avem A.Ob. de la pct a)

La $-\infty$ avem A.Ob. dreapta de ecuație $y = 2x - 3$ 3p

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 2x - 8} = \frac{0}{0} \text{ (caz de excepție)}$$

c)

Se descompun cele două ecuații de unde rezultă că limita este $\frac{1}{10}$2p

Problema 4.(7p)

Se consideră limitele $L_n = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(3p) a) Calculați L_2, L_3 ;

(4p) b) Arătați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{x - 1} = \frac{1}{3}$.

a) $L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}$; 1p

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 2p$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}{x - 1} + \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{(x - 1)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - 1)}{(\sqrt[4]{x} - 1)(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[12]{x^3}(\sqrt[12]{x} - 1)}{(\sqrt[12]{x} - 1)(\sqrt[12]{x^{11}} + \dots + 1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 4p$$

**BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

ETAPA LOCALĂ – 18.02.2019

CLASA A XII-A

MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Problema 1.(7p)

Fie $a \in \mathbb{R}$ și $G = (-a, a)$. Pe G se definește legea de compoziție $x * y = \frac{a^2 \cdot (x + y)}{a^2 + xy}$.

(4p) a) Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

(3p) b) Se definește funcția $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = F(t) - F(0)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ unde F este o primitivă a funcției $g : G \rightarrow$

$\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$, $(\forall) x \in G$. Demonstrați că f este izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

a) 4p verificare calcul

b)3p -1p determinarea $f(x) = \frac{-1}{2a} \ln \frac{a-x}{a+x}$

-1p bijectivitate

-1p morfism

Problema 2.(7p) Calculați:

(4p) a) $\int \frac{x^2}{(x \cos x - \sin x)(x \sin x + \cos x)} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$

(3p) b) $\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

a) 4p- 1p alegerea $f(x)=x\cos x-\sin x; g(x)=x\sin x+\cos x$

1p calculul $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=-x^2$

2p finalizare $I = -\ln|f(x)| + \ln|g(x)| + C$

b)3p- 1p $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{-x^2}{(x \sin x + \cos x)^2}$

2p $I = -\frac{f(x)}{g(x)} + C$

Problema 3.(7p)

(7p) Fie mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \mid x \neq \frac{1}{2} \right\}$, pe care se consideră operația de

înmulțire a matricelor. Arătați că mulțimea este parte stabilă în raport cu operația de înmulțire a matricelor și determinați elementul neutru al monoidului $(G, \cdot)$.

4p parte stabilă

3p element neutru

Problema 4.(7p)

Fie $I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx, n \in \mathbb{N}^*$.

(2p) a) Să se calculeze I_1 .

(2p) b) Să se arate ca $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$, pentru orice $n > 1$.

(3p) c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

a) 2p $I_1 = \frac{e-2}{e}$

b) 2p demonstrarea relației de recurență

c) 3p $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

**BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 18.02.2019
CLASA A XII A-M2**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Problema 1.(7p)

Pe $M = (-2, \infty)$ se definește legea de compoziție $x*y = xy + 2x + 2y + 2$.

(2p) a) Să se arate că M este parte stabilă a lui R în raport cu legea “ $*$ ”.

(3p) b) Calculați $A = (-2019)*(-2018)*\dots*(-3)*(-2)*(-1)*1*\dots*2019$.

(2p) c) Demonstrați că $\underbrace{x*x*\dots*x}_{n \text{ ori}} = (x+2)^n - 2, \forall x \in R$.

Problema 2.(7p)

Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Arătați că $(M, \cdot)$ formează structură de grup comutativ.

Problema 3.(7p)

(4p) a Fie a și b numere reale și funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1; x < 1 \\ \ln^2 x + x; x \geq 1 \end{cases}$.

Să se determine a și b astfel încât funcția F să fie o primitivă a unei funcții f .

(3p) b) Aflați funcția f .

Problema 4.(7p)

Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2\ln x - 1}{x}$

(3p) a Calculați $I_n = \int_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} f(x) dx$

(4p) b Arătați că $(I_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică. Determinați rația progresiei.

1a	Demonstrație parte stabilă	2p
1b	Verificare $(-2) * (x) = -2$ $(x) * (-2) = -2$ $(-2019) * (-2018) * \dots * 2018 * 2019 = -2$	1p 1p 1p
1c	Demonstrație	2p
2	„” lege pe M comutativitate asociativitate element neutru toate elementele simetrizabile	1p 1p 2p 1p 2p
3a	Funcția F este o primitivă a unei funcții f dacă este continuă pe $\mathbb{R}$. a = 1, b = -1	4p
3b	$f(x) = \begin{cases} 2x - 1; x < 1 \\ \frac{2\ln x}{x} + 1; x \geq 1 \end{cases}$	3p



4a	$I_n = \frac{2n+1}{4}$	3p
4b	$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{2}$ Rația progresiei este $r = \frac{1}{2}$	3p 1p