

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică

Faza locală 14.02.2014

Clasa a V-a

Barem de evaluare

SUBIECTUL I

Pentru orice n număr natural, aflați restul împărțirii numărului $A=5^{n+4} \cdot 3^{n+1} + 5^{n+1} \cdot 3^{n+3} + 3 \cdot 15^n$ la 2013.

Soluție

$$A=5^n \cdot 5^4 \cdot 3^n \cdot 3^1 + 5^n \cdot 5^1 \cdot 3^n \cdot 3^3 + 3 \cdot 15^n \quad (1p)$$

$$A=15^n(5^4 \cdot 3 + 5 \cdot 3^3 + 3) \quad (2p)$$

$$A=15^n(1875+135+3) \quad (2p)$$

$$A=15^n \cdot 2013, \text{ deci } A \text{ este divizibil cu } 2013. \quad (1p)$$

$$\text{Finalizare: restul este } 0. \quad (1p)$$

SUBIECTUL II

Stabiliți dacă următoarele numere sunt pătrate perfecte:

$$a=2001^2-2001-2000;$$

$$b=(1+2+3+\dots+2002) \cdot 3003^{2005};$$

$$c=2^{2n+1} \cdot 5^{2n+3}-3; n \in \mathbf{N}.$$

Soluție

$$a = 2000^2 \quad 2p$$

$$b = 2003 \cdot 1001^{2006} \cdot 3^{2005} \neq p^2 \quad 2p$$

$$c = 10^{2n+1} \cdot 25 - 3 \dots \quad 2p$$

$$u(c) = 7; c \neq p^2 \quad 1p$$

SUBIECTUL III

Ana și Barbu desenează pe câte o foaie de hârtie grupuri de stelute. Ana desenează o stelută, apoi 3 stelute apoi 5 și așa mai departe, de fiecare dată un număr impar. Barbu desenează 2 stelute, apoi 4 stelute, apoi 6 și așa mai departe, de fiecare dată un număr par. Arătați că, indiferent de momentul la care se vor opri din desenat cei doi copii, numărul total de stelute desenate de Ana nu poate fi egal cu numărul total de stelute desenate de Barbu.

Gazeta Matematică

Soluție

Numarul steluțelor desenate de Ana este:

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2 \quad 2p$$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

Numarul stelutelor desenate de Barbu este:

$$2+4+6+\dots+2p=p(p+1) \quad 2p$$

Se observa ca numarul stelutelor desenate de Ana este patrat perfect
 $2p$

iar numarul stelutelor desenate de Barbu este produs de doua nr consecutive,
deci nu poate fi patrat perfect $1p$

SUBIECTUL IV

Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care verifica relația $\overline{ab} \cdot (b^2 + c^2) = 2014$

Gazeta Matematică

Soluție

$$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53 \quad (1p) \Rightarrow \overline{ab} \cdot (b^2 + c^2) = 2 \cdot 19 \cdot 53 \quad (1p)$$

Cazul I

$$\overline{ab} = 19 \Rightarrow c^2 = 106 - 81 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \overline{abc} = 195 \quad (3p)$$

Cazul II

$$\overline{ab} = 38 \Rightarrow c^2 = 53 - 64 \Rightarrow c \notin N \quad (1p)$$

Cazul III

$$\overline{ab} = 53 \Rightarrow c^2 = 38 - 9 \Rightarrow c = 29 \text{ nu este cifră} \quad (1p)$$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ
S.S.M.R - FILIALA MUREȘ
Olimpiada de matematică
Faza locală 14.02.2014
Clasa a VI-a
Barem de evaluare

SUBIECTUL I

Arătați că numărul $a = n^{65} - n^{13}$ se divide cu 10, oricare ar fi n numărul natural.

Soluție

Pentru verificare $n = 0$ și $n = 1$ 2p

Dacă $n > 1$ $u(n^{65}) = u(n^{4 \cdot 16 + 1}) = u(n)$ 2p

$u(n^{13}) = u(n^{4 \cdot 3 + 1}) = u(n)$ 2p

$u(a) = u(n^{65} - n^{13}) = u(n) - u(n) = 0$ rezulta a este divizibil cu 10 1p

SUBIECTUL II

Se consideră numerele raționale pozitive $x = 1\frac{1}{99} + 2\frac{2}{99} + 3\frac{3}{99} + \dots + 98\frac{98}{99}$ și $y = \frac{21}{97} + \frac{2121}{9797} + \frac{212121}{979797}$.

a) Arătați că x este pătrat perfect.

b) Comparați numerele x și y .

Soluție

$$x = \frac{99+1}{99} + \frac{2 \cdot 99 + 2}{99} + \dots + \frac{98 \cdot 99 + 98}{99} = \frac{100 + 200 + \dots + 9800}{99} \quad 2p$$

$$x = \frac{100(1+2+\dots+98)}{99} = \frac{100 \cdot 98 \cdot 99 : 2}{99} = 100 \cdot 49 = 70^2 - \text{pătrat perfect} \quad 2p$$

$$y = \frac{21}{97} + \frac{21 \cdot 101}{97 \cdot 101} + \frac{21 \cdot 10101}{97 \cdot 10101} = \frac{21}{97} + \frac{21}{97} + \frac{21}{97} = \frac{63}{97} \quad 2p$$

$x > 1$ și $y < 1$ deci $y < x$. 1p.

SUBIECTUL III

Dreptele AB și CD sunt concurente în O . Știind că semidreptele $[OM]$, $[OT]$, $[OR]$, sunt bisectoarele unghiurilor $\angle BOD$, $\angle DOM$ și respectiv, $\angle COB$, iar $m(\angle AOM) = 130^\circ$, calculați:

a) $m(\angle ROM)$;

b) $m(\angle AOD)$;

c) măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor $\angle AOC$ și $\angle BOR$.

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

Soluție

Desen	1p
$m(\angle ROM) = 90^\circ$	2p
$m(\angle BOM) = 50^\circ = m(\angle DOM); m(\angle AOD) = 80^\circ$	2p
$\text{unghiul cautat} = 180^\circ - 1/2 \cdot m(\angle AOC) - 1/2 \cdot m(\angle ROB) =$ $= 180^\circ - 1/2 \cdot m(\angle DOB) - 1/2 \cdot 1/2 \cdot m(\angle COB) =$ $= 180^\circ - 1/2 \cdot 100^\circ - 1/4 \cdot 80^\circ = 110^\circ$	1p 1p

Subiectul IV.

Demonstrați că, oricare ar fi n număr natural, numărul $A = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ este divizibil cu 17.

Gazeta matematică

Soluție

$$A = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 15 \cdot 5^{2n} + 2 \cdot 2^{3n} \quad (1p)$$

$$A = 15 \cdot 25^n + 2 \cdot 8^n \quad (1p)$$

$$A = 15 \cdot (17 + 8)^n + 2 \cdot 8^n \quad (2p)$$

$$A = 15 \cdot M_{17} + 15 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n \quad (1p)$$

$$A = 15 \cdot M_{17} + 17 \cdot 8^n \quad (1p)$$

$$A : 17 \quad (1p)$$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ
S.S.M.R - FILIALA MUREȘ
Olimpiada de matematică
Faza locală 14.02.2014
Clasa a VII-a
Barem de evaluare

SUBIECTUL I

Fie expresia $A = 53 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2014} \right)$.

- a) Să se calculeze valoarea expresiei A.
 b) Să se demonstreze că A poate fi scris în forma $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$, unde suma cifrelor din numerele a, b și c este egală cu suma cifrelor din numerele d și e.

Soluție

$$a) A = 53 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} \right) = 53 \cdot \left(1 - \frac{1}{2014} \right) = 53 \cdot \frac{2013}{2014} = \frac{2013}{38}$$

(4p)

$$b) A = \frac{2013}{38} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 61}{2 \cdot 19}, \quad (2p)$$

Suma cifrelor din numitor și numărător este egală cu 12. (1p)

SUBIECTUL II

ABCD dreptunghi. Fie dreptunghiul ABCD. Perpendiculara AM pe BD ($M \in BD$), intersectează BC și DC, respectiv în E și F. Să se arate că $\frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE}$.

Soluție

$$ABCD \text{ dreptunghi} \Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ECF \Rightarrow \frac{FE}{EA} = \frac{CE}{EB} = \frac{CF}{AB} \Rightarrow \frac{EF+AE}{AE} = \frac{CF+AB}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{DF}{AB} \quad (3p)$$

$$\Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle FMD \Rightarrow \frac{FM}{MA} = \frac{DM}{MB} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow$$

$$\frac{AF}{AE} = \frac{FM}{AM} = \frac{AF-AM}{AM} \Rightarrow$$

(3p)

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AF}{AM} - 1 \mid \cdot \frac{1}{AF} \Rightarrow \frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE} \quad (1p)$$

SUBIECTUL III

În triunghiul ascutitunghic ABC, înălțimea AD este egală cu latura BC. Bisectoarele unghiurilor ADB și ADC intersectează pe AB

respectiv AC în M și N. Să se arate că: $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$.

Soluție

desen

1p

teorema bisectoarei în triunghiurile ADB și ADC

4p

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = \frac{BD}{DA} + \frac{DC}{DA} = \frac{BD + DC}{DA} = \frac{BC}{DA} = 1 \text{ deoarece } DA=BC \quad 2p$$

SUBIECTUL IV

Dacă a, b, c sunt numere naturale impare, iar q este un număr rațional pozitiv oarecare, arătați că

$$aq^2 + bq + c \neq 0$$

Soluție

Fie $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q = \frac{m}{n}$ unde m și n sunt numere întregi, $n \neq 0$.

$$\text{Atunci : } a \cdot q^2 + b \cdot q + c = a \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2 + b \cdot \frac{m}{n} + c = \frac{a \cdot m^2 + b \cdot m \cdot n + c \cdot n^2}{n^2} \quad (1p)$$

Cum numerele întregi a, b, c sunt impare, distingem cazurile :

$$m, n \text{ impare} \Rightarrow a \cdot m^2 + b \cdot m \cdot n + c \cdot n^2 \text{ este un număr impar.} \quad (2p)$$

$$m \text{ par}, n \text{ impar} \Rightarrow a \cdot m^2 + b \cdot m \cdot n + c \cdot n^2 \text{ este un număr impar.} \quad (2p)$$

$$m \text{ impar}, n \text{ par} \Rightarrow a \cdot m^2 + b \cdot m \cdot n + c \cdot n^2 \text{ este un număr impar.} \quad (2p)$$

$$\text{Deci: } a \cdot q^2 + b \cdot q + c \neq 0$$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

INSPECTORATUL SCOLAR JUDETEAN MURES
S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală 14.02.2014
Clasa a VIII-a
Barem de evaluare

SUBIECTUL I

- a) Aduceți la o formă mai simplă expresia $(5+4)(5^2+4^2)(5^4+4^4)(5^8+4^8) \dots (5^{512}+4^{512})$.
 b) Arătați că:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{29}{\sqrt{210}} \geq 28$$

Soluție

a) Fie $S = (5+4)(5^2+4^2)(5^4+4^4)(5^8+4^8) \dots (5^{512}+4^{512})$

$$S(5-4) = (5-4)(5+4)(5^2+4^2)(5^4+4^4)(5^8+4^8) \dots (5^{512}+4^{512}) \dots 1p$$

Obținerea succesivă a diferențelor de pătrate2p

Finalizare

$$S = (5^{512} - 4^{512})(5^{512} + 4^{512}) = 5^{1024} - 4^{1024} \dots 1p$$

b)

$$m_g(a; b) \leq m_a(a; b), \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ de unde } \frac{a+b}{\sqrt{a \cdot b}} \geq 2 \dots 1p$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{\sqrt{2}} \geq 2 \\ \frac{5}{\sqrt{6}} \geq 2 \\ \vdots \\ \frac{29}{\sqrt{210}} \geq 2 \end{array} \right\} \dots 1p$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{29}{\sqrt{210}} \geq 2 \cdot 14 = 28 \dots 1p$$

SUBIECTUL II

Demonstrați ca oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z are loc inegalitatea:

$$2xy(2x+y) + 6xz(2x+3z) + 3yz(y+3z) \geq 36xyz$$

Soluție

notăm $2x = a, y = b$ și $3z = c$

inegalitatea devine: $ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) \geq 6abc \dots 1p$

$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 - 2abc - 2abc - 2abc \geq 0 \dots 2p$$

$$b(a^2 + c^2 - 2ac) + a(b^2 + c^2 - 2bc) + c(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 \dots 2p$$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

$$b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + c(a-b)^2 \geq 0 \text{ adevărat deoarece este sumă de numere pozitive}$$

... 2p

SUBIECTUL III

Fie cubul ABCDA'B'C'D', Q centrul feței BCC'B' și P mijlocul muchiei (AB). Fie $DM \perp PC$, $M \in PC$. Arătați că:

- dreapta DM conține mijlocul segmentului (BC);
- $QM \perp PC$.

Soluție

- Fie $BC \cap DM = \{N\}$

$\triangle DMC$ dreptunghic, $m(\angle DMC) = 90^\circ$,

$\triangle CBP$ dreptunghic, $m(\angle PBC) = 90^\circ$

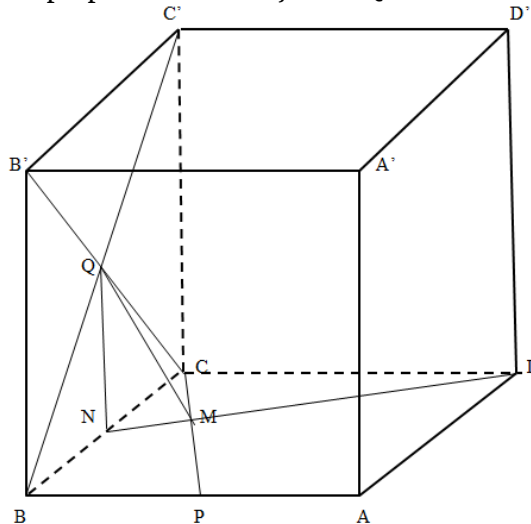
$\angle DCM \equiv \angle CPB$ (alterne interne).

Se obțin astfel unghiurile $\angle NDC$ și $\angle PCB$ congruente 2p

Din congruența $\triangle PCB \equiv \triangle NCD$ se obține congruența $[PB] \equiv [NC]$, deci N mijlocul segmentului (BC) 2p

- Din QN linie mijlocie în $\triangle BCC'$ rezultă $QN \parallel CC'$, iar $CC' \perp (ABC)$, deci $QN \perp (ABC)$ 1p

Din teorema celor 3 perpendiculare obținem $QM \perp PC$ 2p



SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul ABC în care D este mijlocul segmentului BC. Dacă E este mijlocul segmentului AD, F este mijlocul segmentului BE, iar G este punctul de intersecție a dreptelor AB și CF, calculați $\frac{AG}{AB}$.

Gazeta matematică

Soluție

Construim $FM \parallel AB$ cu $M \in AD$ și $EN \parallel AB$ cu $N \in BC$. (1p)

Vom avea FM linie mijlocie în $\triangle EAB \Rightarrow FM = \frac{AB}{2}$ și EN linie mijlocie în $\triangle DAB \Rightarrow NE = \frac{AB}{2}$

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.

Deci, $FM = NE = \frac{AB}{2}$ (1p)

$$\triangle FGB \equiv \triangle FPE (ULU) \Rightarrow [EP] \equiv [BG] \text{ (1p)}$$

Din (t.f.a) $\Rightarrow \triangle CPN \approx \triangle CGB \Rightarrow \frac{NP}{BG} = \frac{CN}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow NP = \frac{3 \cdot BG}{4}$ (2p)

Dar, $NE = EP + NP \Rightarrow \frac{AB}{2} = BG + \frac{3 \cdot BG}{4} \Rightarrow AB = \frac{7 \cdot BG}{2} \Rightarrow AG = \frac{5 \cdot BG}{2}$ (1p)

In final, $\frac{AG}{AB} = \frac{5}{7}$. (1p)

NOTĂ: Orice altă rezolvare corectă se evaluează cu punctaj maxim.