CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

a) **Aflaţi câte numere naturale pătrate perfecte de trei cifre sunt divizibile cu 2^3.**

b) **Aflaţi câte numere naturale cuburi perfecte de patru cifre sunt divizibile cu 2^4.**

a) Numerele de trei cifre pătrate perfecte fiind divizibile cu 2^3 sunt de forma $2^4 \cdot k^2$.	**2p**
Numerele naturale de trei cifre se obţin pentru k $\in$ {3, 4, 5, 6, 7}. Sunt 5 numere.	**1p**
b) Numerele de patru cifre cuburi perfecte fiind divizibile cu 2^4 sunt de forma $2^6 \cdot p^3$.	**2p**
Numerele naturale de patru cifre se obţin pentru p $\in$ {3, 4, 5}. Sunt 3 numere.	**2p**

SUBIECTUL 2

a) **Aflaţi restul împărţirii numărului $a = 7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4$ la 1000.**

b) **Fie numărul $b = 7^0 + 7^1 + 7^2 + ... + 7^{78}$. Aflaţi restul împărţirii numărului 5·b la 1000.**

a) a = 1 + 7 + 49 + 343 + 2401 = 2801 = 1000 · 2 + 801, restul este 801.	**3p**
b) Sunt 79 de termeni, grupându-i câte 4 de la ultimul către primul, rămân primii 3 termeni liberi, astfel: $b = 1+7+49+\left(7^3+7^4+7^5+7^6\right)+...+\left(7^{75}+7^{76}+7^{77}+7^{78}\right)$	**1p**
$=57+7^3\left(1+7+7^2+7^3\right)+...+7^{75}\left(1+7+7^2+7^3\right)$	**1p**
$=57+7^3\cdot 400+...+7^{75}\cdot 400=57+400\left(7^3+7^7+...+7^{75}\right)$	**1p**
$5b = 1000\cdot 2\left(7^3+7^7+...+7^{75}\right)+285$, restul este 285.	**1p**

SUBIECTUL 3

Fie mulţimea $A = \{ x^2 + y^2 \mid x, y \in \mathbb{N}^*, x \neq y \}$.

a) **Arătaţi că $5^5 \in A$.**

b) **Arătaţi că $\left(4^n+1\right)^{4^n+1} \in A$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.**

a) $5^5 = 5^4 \cdot 5 = 5^4(4+1) = 5^4 \cdot 4 + 5^4 = (5^2 \cdot 2)^2 + (5^2)^2 \in A$	**3p**
b) $\left(4^n+1\right)^{4^n+1} = \left(4^n+1\right)^{4^n}\left(4^n+1\right)$	**1p**
$=\left(4^n+1\right)^{4^n}\cdot 4^n+\left(4^n+1\right)^{4^n}$	**1p**
$=\left(4^n+1\right)^{4^{n-1}\cdot 4}\cdot 2^{2n}+\left(4^n+1\right)^{4^{n-1}\cdot 4}$	**1p**
$=\left[\left(4^n+1\right)^{4^{n-1}\cdot 2}\cdot 2^n\right]^2+\left[\left(4^n+1\right)^{4^{n-1}\cdot 2}\right]^2 \in A.$	**1p**

SUBIECTUL 4

Determinaţi numerele de forma $\overline{abcd}$, ştiind că împărţind pe $\overline{abcd}$ la $\overline{cd}$ se obţine câtul 43 şi restul $\overline{ab}$.

$\overline{abcd} = \overline{cd} \cdot 43 + \overline{ab}$, $\overline{ab} < \overline{cd}$.	**2p**
$100\overline{ab} + \overline{cd} = 43\overline{cd} + \overline{ab}$.	**1p**
$99\overline{ab} = 42\overline{cd}$.	**1p**
$33\overline{ab} = 14\overline{cd} \Rightarrow \overline{cd} \in \{33, 66, 99\}$.	**2p**
$\overline{abcd} \in \{1433, 2866, 4299\}$.	**1p**

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

a) **Stabiliţi câţi divizori are numărul $n = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$.**

b) **Aflaţi numerele $\overline{abc}$, ştiind că $(\overline{abc} - 11) \vdots 48$ şi $(\overline{abc} - 19) \vdots 56$.**

a) $n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ n are $5\cdot3\cdot2\cdot2 = 60$ divizori.	**3p**
b) $\overline{abc} = \mathcal{M}_{48} + 11$ şi $\overline{abc} = \mathcal{M}_{56} + 19$, rezultă $\overline{abc} + 37 = \mathcal{M}_{48}$ şi $\overline{abc} + 37 = \mathcal{M}_{56}$.	**2p**
Şi atunci $\overline{abc} + 37 = \mathcal{M}_{[48,\,56]} = \mathcal{M}_{336}$.	**1p**
Avem: $\overline{abc} + 37 \in \{336, 672, 1008\}$ şi atunci $\overline{abc} \in \{299, 635, 971\}$.	**1p**

SUBIECTUL 2

a) **Determinaţi numerele naturale a şi b, astfel încât $a(b + 5) = 51$.**

b) **Determinaţi numerele naturale a şi b, astfel încât $\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a^2+b^2}{2} = \dfrac{b+3}{b+1}$.**

a) $b + 5 \mid 51$, $b + 5 \geq 5 \Rightarrow b + 5 \in \{17, 51\} \Rightarrow b \in \{12, 46\} \Rightarrow (a, b) \in \{(3, 12), (1, 46)\}$.	**3p**
b) Relaţia dată se scrie: $\dfrac{a+a^2+b+b^2}{2} = \dfrac{b+3}{b+1}$; $a+a^2$ şi $b+b^2$ sunt pare, deci membrul stâng este natural.	**2p**
Rezultă că numărul $\dfrac{b+3}{b+1} = 1 + \dfrac{2}{b+1}$ este natural, de unde $b+1 \in D_2$.	**1p**
$b \in \{0, 1\} \Rightarrow (a, b) \in \{(2, 0), (1, 1)\}$.	**1p**

SUBIECTUL 3

a) **Aflaţi măsura unui unghi, ştiind că măsura complementului unghiului reprezintă 10% din măsura suplementului său.**

b) **Aflaţi măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD, DOA formate în jurul punctului O, astfel încât $4\cdot m(\sphericalangle AOB) = 3\cdot m(\sphericalangle BOC) = 2\cdot m(\sphericalangle COD)$, iar măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOB şi DOA este de 75^0.**

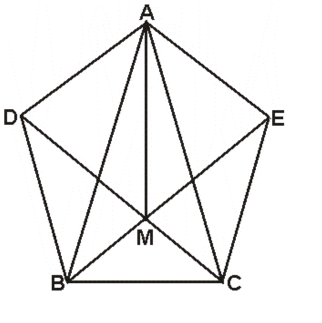
a) Dacă se notează cu c măsura complementului şi cu s măsura suplementului, atunci $s - c = 90^0$, de unde $s - 10\%s = 90^0 \Rightarrow s = 100^0$. Măsura unghiului este de 80^0.	**3p**
Sau dacă x este măsura unghiului, atunci $10(90^0 - x) = 180^0 - x$ **(2p)**; $x = 80^0$ **(1p)**.	
b) $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle DOA) = 2\cdot75^0 = 150^0$, de unde $m(\sphericalangle BOD) = 150^0$.	**1p**
Se obţine $m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 210^0$.	**1p**
Notând $m(\sphericalangle AOB) = 3x$, $m(\sphericalangle BOC) = 4x$, $m(\sphericalangle COD) = 6x$, se obţine ecuaţia $4x+6x = 210^0$ şi $x = 21^0$. De unde $m(\sphericalangle AOB) = 63^0$, $m(\sphericalangle BOC) = 84^0$, $m(\sphericalangle COD) = 126^0$, $m(\sphericalangle DOA) = 87^0$.	**2p**

SUBIECTUL 4

În exteriorul triunghiului isoscel ABC de vârf A se construiesc triunghiurile isoscele congruente DAB şi EAC, de baze [AB], respectiv [AC]. Dacă $CD \cap BE = \{M\}$, demonstraţi:

a) **$[BE] \equiv [CD]$.**

b) **[MA este bisectoarea unghiului DME.**



a) $\Delta ADC \equiv \Delta AEB$(LUL) $\Rightarrow [CD] \equiv [BE]$.	**3p**
b) $\Delta DBC \equiv \Delta ECB$(LLL) $\Rightarrow \sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle CEB$.	**1p**
OBS: Sau ia direct $\Delta DBC \equiv \Delta ECB$(LUL) $\Rightarrow \sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle CEB$ **(4p)**.	
Dacă arată că $[MD] \equiv [ME]$, cu $\Delta DBM \equiv \Delta ECM$(LUU sau ULU). Sau cu $CD - MC = BE - MB$, $MC = MB$.	**2p**
$\Delta ADM \equiv \Delta AEM$(LLL) $\Rightarrow \sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle AME$, deci [MA este bisectoarea unghiului DME.	**1p**

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

a) **Scrieţi numărul $\frac{1}{4}$ ca suma a 4 fracţii cu numărătorul 1 şi cu numitorii numere naturale diferite.**

b) **Arătaţi că pentru orice n număr natural, n≥2, numărul $\frac{1}{n}$ se scrie ca suma a n fracţii cu numărătorul 1 şi cu numitorii numere naturale diferite.**

a) $\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}$	3p
Alte scrieri: $\frac{1}{4}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{84}$; $\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{28}+\frac{1}{168}$; $\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$.	
b) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)n}=1+\frac{n-1}{n}=\frac{2n-1}{n}$.	2p
Înmulţind egalitatea anterioară cu $\frac{1}{2n-1}$ se obţine $\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot(2n-1)}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot(2n-1)}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}=\frac{1}{n}$.	2p
Variantă pentru b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}=1$ **(2p)**, de unde $\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{3\cdot n}+\frac{1}{3^2\cdot n}+...+\frac{1}{3^{n-2}\cdot n}+\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}\cdot n}=\frac{1}{n}$, pentru n>2, iar pentru n=2 se ia forma anterioară. **(2p)**.	

SUBIECTUL 2

a) **Arătaţi că există $n\in\mathbb{Z}$, astfel încât $\sqrt{2n^2+10n+49}\in\mathbb{Q}$.**

b) **Arătaţi că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{2n^2+10n+50}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.**

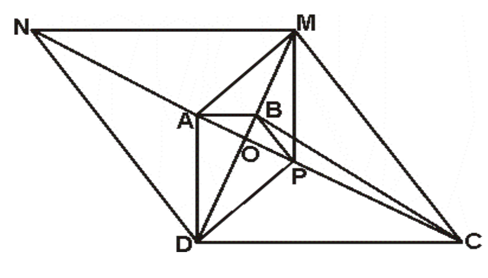
a) Valori imediate n = 0 sau n = − 5 se obţine $\sqrt{49}=7\in\mathbb{Q}$. Pentru o singură valoare **(3p).**	3p
b) $2n^2 + 10n + 50 = 2(n^2 + 5n + 25) = 2[n(n + 5) + 25]$.	1p
n(n + 5) este număr par, $\forall n\in\mathbb{N}$. Şi atunci n(n + 5) + 25 este număr natural impar, $\forall n\in\mathbb{N}$.	2p
Deoarece $2 \mid 2n^2 + 10n + 50$ şi $2^2 \nmid 2n^2 + 10n + 50 \Rightarrow \sqrt{2n^2+10n+50}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.	1p

SUBIECTUL 3

Fie ABCD trapez dreptunghic, cu m(∢A) = m(∢D) = 90⁰, AB < CD şi AC ⊥ BD. Punctele M şi N sunt simetricele punctelor D şi C faţă de punctul O de intersecţie a diagonalelor, iar MP ⊥ DC, P∈AC.

a) **Arătaţi că MADP este romb.**

b) **Demonstraţi că AM ⊥ ND şi BP ⊥ DP.**



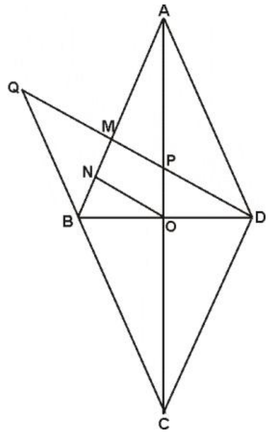
a) MP ⊥ DC, AD ⊥ DC ⇒ MP ∥ AD ⇒ ∢ADM≡∢PMD.	1p
ΔADO≡ΔPMO(ULU) ⇒ OA = OP şi cum OD = OM ⇒ MADP este paralelogram.	1p
Dar AP ⊥ DM ⇒ MADP romb.	1p
b) OD=OM şi OC=ON⇒MNDC este paralelogram ⇒MN ∥ DC ∥ AB. În ΔDMN, DA ⊥ MN, NO ⊥ DM, DA∩NO={A} ⇒ AM ⊥ ND.	2p
ΔDAB≡ΔDPB(LUL) ⇒ m(∢DAB) = m(∢DPB) = 90⁰ ⇒ BP ⊥ DP.	2p

SUBIECTUL 4

În rombul ABCD, $AC \cap BD = \{O\}$, $M \in (AB)$, astfel încât $AM = 1,5 \cdot MB$.

a) **Dacă $ON \parallel DM$, $N \in (AB)$, determinaţi raportul $\frac{AN}{NB}$.**

b) **Dacă $DM \cap AC = \{P\}$ şi $DM \cap BC = \{Q\}$, determinaţi raportul $\frac{PM}{DQ}$.**



a) În ΔBDM, O este mijlocul lui [BD] şi $ON \parallel DM \Rightarrow MN = NB$.	**1p**
Din $MB = 2 \cdot NB \Rightarrow AM = 3 \cdot NB$, de unde $AN = 4 \cdot NB$ şi $\frac{AN}{NB} = 4$.	**2p**
b) [AP este bisectoare în $\Delta ADM \Rightarrow \frac{PM}{DP} = \frac{AM}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{PM}{DM} = \frac{3}{8}$ (1).	**2p**
$AD \parallel BQ \Rightarrow \frac{DM}{MQ} = \frac{AM}{MB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{DM}{DQ} = \frac{3}{5}$ (2).	**1p**
Din (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{PM}{DQ} = \frac{9}{40}$.	**1p**

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

a) **Calculaţi: $(8x^2 - 8x + 1)^2 - (8x^2 - 8x)(8x^2 - 8x + 2)$.**

b) **Arătaţi că dacă numerele naturale a şi b sunt consecutive, atunci numerele**

$16ab(a+b)^2$ şi $(a^2 + 6ab + b^2)^2$ sunt consecutive.

a) $(8x^2 - 8x + 1)^2 - (8x^2 - 8x)(8x^2 - 8x + 2) =$ $64x^4 + 64x^2 + 1 - 128x^3 - 16x + 16x^2 - 64x^4 + 64x^3 - 16x^2 + 64x^3 - 64x^2 + 16x = 1$.	**3p**
Sau notează $8x^2 - 8x = y$ şi obţine $(y+1)^2 - y(y+2) = y^2 + 2y + 1 - y^2 - 2y = 1$ **(3p)**.	
b) $(a^2 + 6ab + b^2)^2 - 16ab(a+b)^2 = a^4 + 36a^2b^2 + b^4 + 12a^3b + 12ab^3 + 2a^2b^2 - 16a^3b - 32a^2b^2 - 16ab^3$	**2p**
$= a^4 + 6a^2b^2 + b^4 - 4a^3b - 4ab^3 = (a^2 - 2ab + b^2)^2 = (a-b)^4 = 1$.	**2p**

SUBIECTUL 2

a) **Arătaţi că pentru $x = 0{,}58(3)$ numărul $\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ este raţional.**

b) **Arătaţi că există o infinitate de valori raţionale ale lui x pentru care numărul $\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ este raţional.**

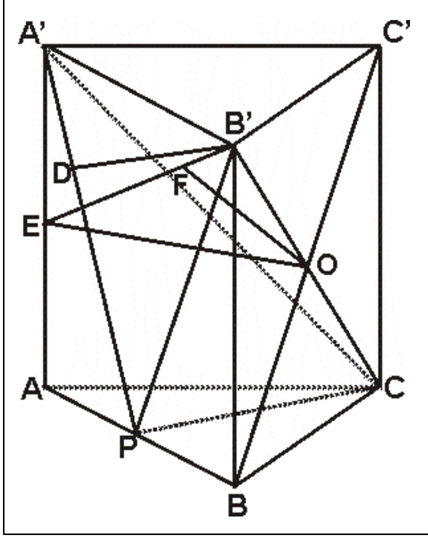
a) $x = 0{,}58(3) = \dfrac{583-58}{900} = \dfrac{525}{900} = \dfrac{7}{12}$.	**2p**
$\sqrt{\left(\dfrac{7}{12}\right)^2 - 2\cdot\dfrac{7}{12} + 2} = \dfrac{13}{12} \in \mathbb{Q}$.	**1p**
b) $x^2 - 2x + 2 = k^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = k^2 \Leftrightarrow (k + x - 1)(k - x + 1) = 1$. Se poate lua $k + x - 1 = p$ şi $k - x + 1 = \dfrac{1}{p}$, $p \in \mathbb{Q}^*$.	**2p**
Se obţine $x = \dfrac{p}{2} - \dfrac{1}{2p} + 1$ şi $\sqrt{\left(\dfrac{p}{2} - \dfrac{1}{2p} + 1\right)^2 - 2\left(\dfrac{p}{2} - \dfrac{1}{2p} + 1\right) + 2} = \dfrac{1}{2}\cdot\left\lvert p + \dfrac{1}{p}\right\rvert \in \mathbb{Q}$.	**2p**

SUBIECTUL 3

Fie ABCA'B'C' o prismă triunghiulară regulată cu AB = AA' = 2a.

a) **Dacă P este mijlocul muchiei [AB], calculaţi distanţa de la B' la planul (A'PC).**

b) **Dacă E este mijlocul muchiei [AA'], demonstraţi că $BC' \perp (EB'C)$ şi calculaţi distanţa dintre dreptele EB' şi BC'.**



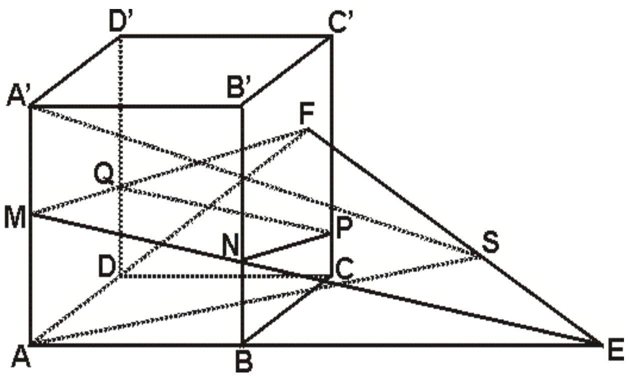
a) $CP \perp AB$, $CP \perp AA'$, $AB \cap AA' = \{A\} \Rightarrow CP \perp (ABB'A')$ şi atunci lungimea segmentului [B'D] reprezintă distanţa, unde $B'D \perp A'P$, $D \in [A'P]$. $B'D \cdot A'P = 4a^2 \Rightarrow B'D = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$.	**3p**
Sau fără să construiască: $d(B', (A'PC)) \cdot \mathcal{A}_{A'PC} = d(C, (A'B'P)) \cdot \mathcal{A}_{A'B'P}$, $d(B', (A'PC)) \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = a\sqrt{3} \cdot 2a^2 \Rightarrow d(B', (A'PC)) = \dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$ **(3p)**.	
b) Dacă $B'C \cap BC' = \{O\}$, din triunghiul isoscel EBC' de vârf E, $BC' \perp EO$, dar $BC' \perp B'C$, BCC'B' fiind pătrat, $\Rightarrow BC' \perp (EB'C)$.	**2p**
Fie $OF \perp EB'$, OF este perpendiculara comună dreptelor EB' şi BC', lungimea lui OF reprezintă distanţa.	**1p**
$OF = \dfrac{OB' \cdot OE}{EB'} = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.	**1p**

SUBIECTUL 4

Pe muchiile [AA'], [BB'], [CC'] ale cubului ABCDA'B'C'D' se consideră punctele M, N, P, astfel încât $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BB'}=\frac{1}{3}$ şi $\frac{CP}{CC'}=\frac{1}{4}$.

a) Dacă DD'$\cap$(MNP)={Q}, aflaţi raportul $\frac{DQ}{DD'}$.

b) Dacă AB = 5 cm, aflaţi distanţa de la punctul A' la dreapta de intersecţie a planelor (MNP) şi (ABC).



a) DQ+BN=AM+CP.	**1p**
Dacă a este muchia cubului, atunci $DQ+\frac{1}{3}a=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a \Rightarrow DQ=\frac{5}{12}a$, de unde $\frac{DQ}{DD'}=\frac{5}{12}$.	**2p**
b) Fie MN$\cap$AB={E}, MQ$\cap$AD={F} $\Rightarrow$ (MNPQ)$\cap$(ABCD)=EF.	**1p**
A'A$\perp$(ABCD), AS$\perp$EF, AS, EF$\subset$(ABCD) $\Rightarrow$ A'S$\perp$EF.	**1p**
$\frac{BE}{AE}=\frac{BN}{AM}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{1}{3} \Rightarrow$ AE=15 cm. $\frac{DF}{AF}=\frac{DQ}{AM}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{AD}{AF}=\frac{1}{6} \Rightarrow$ AF=30 cm.	**1p**
EF=$15\sqrt{5}$; AS=$6\sqrt{5}$; A'S=$\sqrt{205}$.	**1p**