

Olimpiada de matematică
faza locală
 21 februarie 2016

Soluții și bareme
Clasa a X-a

1. Fie a, b, c numere pozitive, diferite de 1. Notăm

$$x = \log_a bc, \quad y = \log_b ac, \quad z = \log_c ab.$$

Arătați că

$$x + y + z + 2 = xyz.$$

Soluție. Avem $x + 1 = \log_a abc$, de unde $\log_{abc} a = \frac{1}{x+1}$ și analoagele.....3p
 Deducem $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$ 2p
 Concluzia 2p

2. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}.$$

Soluție. Observăm că $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60} = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2$ 2p
 deci ecuația se scrie $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ 1p
 Se observă soluția $x = 1$ 1p
 Soluția e unică deoarece membrul stâng e funcție strict crescătoare.....3p

3. Să se arate că nu există funcții injective $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

$$f(3^x) + f(5^x) = 8,$$

pentru orice x real.

Soluție. Presupunând că există f injectivă, pentru $x = 1$ obținem $f(3) + f(5) = 8$. Pentru $x = \log_3 5$, obținem $f(5) + f(5^{\log_3 5}) = 8$ 3p
 Deducem $f(3) = f(5^{\log_3 5})$ și, din injectivitate, $3 = 5^{\log_3 5}$ 2p
 Logaritmând egalitatea în baza 3, obținem o contradicție 2p

4. Fie u, v, w numere complexe astfel ca

$$u + v + w = u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Arătați că $|u| = |v| = |w|$.

Soluție. Avem $w = -u - v$ și apoi $u^2 + v^2 + (-u - v)^2 = 0$, de unde $u^2 + v^2 + uv = 0$3p
 Înmulțind cu $u - v$, deducem $u^3 - v^3 = 0$, de unde $u^3 = v^3$, deci $|u| = |v|$ 3p
 Analog $|u| = |w|$ 1p