

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A X-A

15 februarie 2015

Problema 1:

a) Arătați că $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

b) Dacă $a, b, c, d \in (1, \infty)$ arătați că $\log_a \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} + \log_b \frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a} + \log_c \frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} + \log_d \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq 4$

Problema 2:

Fie $f: \mathbb{R}^* \rightarrow M, M \text{ inclus in } \mathbb{R}, f(x) = \frac{ax^3+1}{x}, a \in \mathbb{R}$. Să se determine a și M încât funcția f să fie bijectivă

Problema 3:

Fie $z_1, z_2, \dots, z_{2015} \in \mathbb{C}$. Arătați că dacă $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_{2015}|^2 = \operatorname{Re}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + \dots + z_{2015} z_1)$ atunci numerele $z_1 + z_2 + \dots + z_{2015}$ și $z_1 z_2 \dots z_{2015}$ sunt reale.

Problema 4:

Fie $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $g(x) \leq -g\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in (0, \infty)$.

Să se determine funcțiile $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât să fie satisfăcute condițiile:

a) $f(x) \leq g(x), \forall x \in (0, \infty)$

b) $f(xy) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in (0, \infty)$

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problema are 7 puncte