



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a XI-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

a) Arătați că $A = B \cdot C \cdot B^{-1}$, unde B^{-1} este inversa matricii B .

b) Calculați A^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție și barem

$$\text{a) } \det B = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \Rightarrow B \text{ este inversabilă } {}_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{12} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{12} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & 1 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & 1 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & 1 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$$1.b) A^n = (B \cdot C \cdot B^{-1})^n = B \cdot C \cdot B^{-1} \cdot B \cdot C \cdot B^{-1} \cdot B \cdot C \cdot B^{-1} \cdot \dots \cdot B \cdot C \cdot B^{-1} = B \cdot C^n \cdot B^{-1} \dots\dots\dots 1p$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}; C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & -3^3 \end{pmatrix} \dots\dots C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \cdot 3^n \end{pmatrix}, \text{ demonstrație prin inducție } \dots\dots\dots 2p$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \cdot 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & 1 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^n \cdot 3^n \\ 0 & 3^n & \frac{-(-1)^n \cdot 3^n}{6} \\ 0 & 0 & (-1)^n \cdot 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & 1 & -\frac{1}{18} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot 3^n}{3} & 0 & \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3} \\ \frac{-(-1)^n \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n}{9} & 3^n & \frac{-(-1)^n \cdot 3^n - 3^n}{18} \\ \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot 3^n}{3} & 0 & \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3} \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a XI-a

Subiectul 2 (7 puncte)

Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}}$.

Soluție și barem

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ unde}$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{x-1} \text{ și } L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}}{x-1} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{unde } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)((\sqrt{x+3}+2))} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7}-2)(\sqrt[3]{(x+7)^2+2^3}\sqrt{x+7}+2^2)}{(x-1)(\sqrt[3]{(x+7)^2+2^3}\sqrt{x+7}+2^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2+2^3}\sqrt{x+7}+2^2} = \frac{1}{12} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x+31}-2}{x-1} = \frac{1}{32} - \frac{1}{80} = \frac{3}{160}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x+15}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[4]{x+15}-2)(\sqrt[4]{(x+15)^3+2^4}\sqrt{(x+15)^2+2^2}\sqrt{x+15}+2^3)}{(x-1)(\sqrt[4]{(x+15)^3+2^4}\sqrt{(x+15)^2+2^2}\sqrt{x+15}+2^3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[4]{(x+15)^3+2^4}\sqrt{(x+15)^2+2^2}\sqrt{x+15}+2^3} = \frac{1}{32} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x+31}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[5]{x+31}-2)(\sqrt[5]{(x+31)^4+2^5}\sqrt{(x+31)^3+2^2}\sqrt[5]{(x+31)^2+2^3}\sqrt{x+31}+2^4)}{(x-1)(\sqrt[5]{(x+31)^4+2^5}\sqrt{(x+31)^3+2^2}\sqrt[5]{(x+31)^2+2^3}\sqrt{x+31}+2^4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[5]{(x+31)^4+2^5}\sqrt{(x+31)^3+2^2}\sqrt[5]{(x+31)^2+2^3}\sqrt{x+31}+2^4)} = \frac{1}{80} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Finalizare } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[4]{x+15} - \sqrt[5]{x+31}} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{160}{3} = \frac{80}{9} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a XI-a

Subiectul 3 (7 puncte)

- a) Fie $A \in M_2(R)$. Arătați că $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$ dacă și numai dacă $A^2 - A + I_2 = O_2$ sau $A^2 + A + I_2 = O_2$.
b) Dați un exemplu de o matrice $A \in M_2(C)$ astfel încât $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$, $A^2 - A + I_2 \neq O_2$ și $A^2 + A + I_2 \neq O_2$

Soluție și barem

- a) Dacă $A^2 - A + I_2 = O_2$ sau $A^2 + A + I_2 = O_2$ atunci $A^4 + A^2 + I_2 = (A^2 - A + I_2)(A^2 + A + I_2) = O_2$1 punct
Dacă polinomul minimal al matricii A are gradul 1 atunci există $\alpha, \beta \in R, \alpha \neq 0$ astfel încât $\alpha A + \beta I_2 = O_2 \Rightarrow A = -\frac{\beta}{\alpha} I_2 = \gamma I_2, \gamma \in R \Rightarrow A^4 + A^2 + I_2 = (\gamma^4 + \gamma^2 + 1)I_2 = O_2 \Rightarrow \gamma^4 + \gamma^2 + 1 = 0, \gamma \in R$, fals
.....1 punct
Deci polinomul minimal al matricii are gradul 2, coincide cu polinomul caracteristic și divide orice polinom care are pe A ca rădăcină.....1 punct
Cum $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$ este singura descompunere în R rezultă că polinomul caracteristic al lui A este $X^2 - X + 1$ sau $X^2 + X + 1$ adică $A^2 - A + I_2 = O_2$ sau $A^2 + A + I_2 = O_2$1 punct
b) Avem $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$ și ecuația caracteristică a lui A^2 $A^4 - \text{Tr}(A^2) \cdot A^2 + \det(A^2) I_2 = O_2$ deci vom căuta o matrice A^2 cu $\text{Tr}(A^2) = -1$ și $\det(A^2) = 1$, de exemplu $A^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$, unde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$1 punct
Atunci $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$,1 punct
Verificare că $A^4 + A^2 + I_2 = O_2, A^2 - A + I_2 \neq O_2$ și $A^2 + A + I_2 \neq O_2$
.....1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a XI-a

Subiectul 4 (7 puncte)

Să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n \geq 0}$, cu $a_0 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{a_n+2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și în caz de convergență determinați-i limita.

Soluție și barem

Avem $a_0 = 1 > 0$. Presupunem că $a_n > 0$, rezultă $\frac{2a_n+3}{a_n+2} = a_{n+1} > 0$.

Deci prin inducție matematică rezultă că $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$1 punct.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n+3}{a_n+2} - a_n = \frac{2a_n+3-a_n^2-2a_n}{a_n+2} = \frac{3-a_n^2}{a_n+2} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Avem $3 - a_0^2 = 3 - 1^2 = 2 > 0$. Presupunem $3 - a_n^2 > 0$ și rezultă

$$3 - a_{n+1}^2 = 3 - \left(\frac{2a_n+3}{a_n+2}\right)^2 = \frac{3a_n^2+12a_n+12-4a_n^2-12a_n-9}{(a_n+2)^2} = \frac{3-a_n^2}{(a_n+2)^2} > 0$$

Deci prin inducție matematică $3 - a_n^2 > 0 \forall n \in \mathbb{N}$1 punct

Rezultă deci $a_{n+1} - a_n = \frac{3-a_n^2}{a_n+2} > 0 \Rightarrow$ Șirul este strict crescător..1 punct

Din $3 - a_n^2 > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ și $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ rezultă $0 < a_n < \sqrt{3} \forall n \in \mathbb{N}$

Deci șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este mărginit..... 1 punct

Șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ fiind strict crescător și mărginit este convergent adică există

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Trecând la limită în relația de recurență obținem } l = \frac{2l+3}{l+2} \Leftrightarrow l^2 = 3$$

și cum $l > 0$ rezultă $l = \sqrt{3}$1 punct