

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

18 februarie 2018

CLASA a XI-a

1. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ și $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{a^{2^k} + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) (3p) Să se demonstreze că $s_n = \frac{1}{a-1} - \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) (4p) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

2. (7p) Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A^6 = I_3$. Demonstrați că $\det(A - A^*) = 0$ sau $\det(A + A^*) = 0$.
Am notat cu A^* adjuncta matricei A .

3. (7p) Să se arate că $\forall X, Y, Z \in M_3(\mathbb{C})$ avem $X \cdot Y \cdot Z - X \cdot {}^tY \cdot Z \neq I_3$.
Am notat cu tY transpusa matricei Y .

4. (7p) Fie $a, b > 0$. Considerăm șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit recurent astfel:

$$x_0 > 0 \quad \text{și} \quad x_{n+1} = \frac{a + bx_n - \sqrt{a^2 + 2abx_n}}{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Arătați că șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n = \frac{2^n a^n}{b^{2n}} x_n$ este convergent.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.